EUF

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

Para o primeiro semestre de 2016

14 de outubro de 2015

Parte 1

Instruções

- **Não escreva seu nome na prova.**
  Ela deverá ser identificada apenas através do código (**EUFxxx**).
- Esta prova contém problemas de:
  eletromagnetismo, física moderna e termodinâmica.
  Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**.
  O tempo mínimo de permanência na sala é de 90 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **Resolva cada questão na página correspondente do caderno de respostas.**
  As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- Não escreva nada no formulário.
  Devolva-o ao fim da prova, pois será utilizado na prova de amanhã.

Boa prova!

Q1. Definindo-se o vetor de Hertz $\vec{Z}$ pelas expressões:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{Z} = -\phi; \qquad \vec{A} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}, \tag{1}$$

onde ϕ e $\vec{A}$ são, respectivamente, os potenciais escalar e vetor.

a) Mostre que os potenciais satisfazem o calibre de Lorentz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0; \tag{2}$$

b) Demonstre que para um meio sem fontes ($\rho = 0$, $\vec{J} = 0$) e de $\mu = \mu_0$ o vetor $\vec{Z}$ satisfaz às seguintes expressões:

$$\nabla^2 \vec{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}; \qquad \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}; \qquad \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{Z} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}, \tag{3}$$

onde $\vec{P}$ é o vetor de polarização.

Q2. Considere um disco vazado muito fino, com raio interno r_1 e raio externo r_2, deitado sobre o plano xy e com o eixo centrado em $z = 0$ (conforme ilustrado na figura 1).

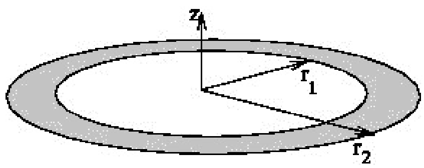


Figura 1: Disco vazado.

O anel tem densidade superficial de carga dada por:

$$\sigma(r) = \frac{\sigma_0}{r}, \tag{4}$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Encontre o campo elétrico $\vec{E}(x = y = 0, z)$ sobre o eixo z;

b) Suponha agora que o anel comece a girar com velocidade angular ω_0. Encontre a densidade de corrente $\vec{J}_s = \sigma \vec{v}$, onde $\vec{v}$ é a velocidade linear;

c) Encontre o campo magnético $\vec{H}(x = y = 0, z)$ sobre o eixo z, gerado pela densidade de corrente $\vec{J}_s$.

Q3. Um píon positivo π^+ pode decair segundo a reação $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$, ou seja, ele pode decair em um múon positivo μ^+ acompanhado por um neutrino muônico ν_μ. Desprezando a massa m_ν do neutrino e considerando um píon inicialmente em repouso num referencial inercial S, determine, no mesmo referencial, em termos das massas do píon (m_π) e do múon (m_μ):
a) O módulo do momentum linear do múon.
b) A energia total do múon.
c) A velocidade do múon.
d) A distância que, em média, um múon percorre (no vácuo) antes de também decair. Use o símbolo τ para o tempo de vida médio do múon medido no próprio referencial da partícula.

Q4. Considere uma partícula não relativística, de massa m, executando um movimento harmônico simples com frequência ν.
a) Determine, em termos de ν, os níveis de energia E permitidos para esta partícula a partir da regra de quantização de Bohr-Sommerfeld $\oint p_q dq = nh$.
b) Considere um sistema contendo um grande número destas partículas em equilíbrio térmico. A partir dos níveis de energia permitidos para cada partícula, determinados no ítem anterior, calcule a energia total média $\langle E \rangle$, onde $P(E_n) = Ae^{-E_n/k_B T}$ é a função de distribuição.

Q5. Considere uma máquina de Carnot operando com um paramagneto ideal, cuja equação de estado é dada pela lei de Curie

$$M = D\frac{H}{T},$$

sendo M a magnetização, H o campo magnético, T a temperatura e D uma constante. A variação de energia interna é dada em termos da variação da entropia e da magnetização por $dU = T\,dS + H\,dM$ (o termo HdM é análogo ao termo $-PdV$ para o gás ideal), e vale também que $dU = C_M dT$, com C_M constante.

a) Determine a relação que vincula os valores iniciais da magnetização e da temperatura M_i, T_i aos valores finais M_f, T_f em uma transformação adiabática, em termos de C_M e D.

b) Represente o ciclo, composto por duas transformações adiabáticas e duas transformações isotérmicas, em um diagrama H-M. As isotermas correspondem respectivamente a uma temperatura mais alta, T_Q, e outra mais baixa, T_F. Indique os quatro estados nos vértices do diagrama como (M_1,H_1) (início do ciclo, no valor mais alto para a magnetização e à temperatura T_Q), (M_2,H_2), (M_3,H_3), (M_4,H_4).

c) Calcule o trabalho total realizado no ciclo, em função de M_1, M_2, T_Q, T_F e da constante D.

d) Obtenha a eficiência do ciclo, dada pela razão entre o trabalho total realizado e o calor absorvido (à temperatura T_Q).

EUF

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

Para o primeiro semestre de 2016

15 outubro 2015

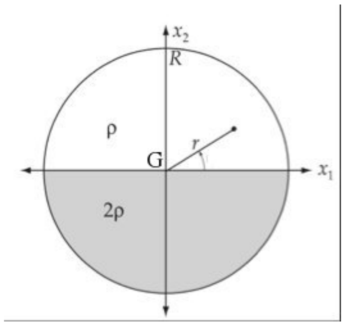
Parte 2

Instruções

- **Não escreva seu nome na prova.**
  Ela deverá ser identificada apenas através do código (**EUFxxx**).
- Esta prova contém problemas de:
  mecânica clássica, mecânica quântica e mecânica estatística.
  Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**.
  O tempo mínimo de permanência na sala é de 90 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **Resolva cada questão na página correspondente do caderno de respostas.**
  As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- Não é necessário devolver o formulário.

Boa prova!

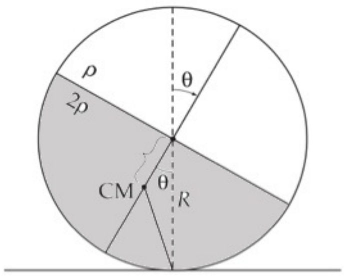
Q6. Um disco de raio R é composto por duas metades cada uma com densidades superficiais de massa respectivas de 1ρ e de 2ρ.



a) Qual é o momento de inércia em relação ao eixo (perpendicular ao plano do disco) que passa pelo seu centro geométrico G?
b) Encontre as coordenadas x_1 e x_2 do centro de massa do disco.
c) Qual é o momento de inércia em relação ao eixo (perpendicular ao plano do disco) que passa pelo seu centro de massa?
d) Considere o movimento em linha reta do disco sobre um plano horizontal perpendicular ao plano do disco, sem deslizar. Encontre $\lambda(\theta)$, implicitamente definido por

$$v(t) = \lambda(\theta)\, R\, \frac{d\theta}{dt},$$

onde θ é o ângulo entre o eixo vertical e a reta que passa pelo centro geométrico e o centro de massa (veja a figura), $v(t)$ é o módulo da velocidade do centro de massa, e $\frac{d\theta}{dt}$ é o módulo da velocidade de rotação do disco.



Q7. Considere um objeto de massa M que se desloca sob ação de uma força central do tipo coulombiana modificada por uma força proporcional ao inverso de r^3,

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{q}{r^3},$$

onde r é a coordenada radial, e k e q são constantes positivas. Considere que a energia total do sistema é descrita por

$$E = \frac{M}{2}\dot{r}^2 + \frac{M}{2} r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{k}{r} - \frac{q}{2r^2},$$

e que o momento angular, do sistema é dado por $L = M\, r^2\, \dot{\theta}$.

a) Para o caso em que o objeto descreva uma órbita circular (de equilíbrio) encontre o raio da órbita em função dos parâmetros k, q, M e L, do sistema.

b) Para as mesmas condições do item a), encontre a energia total, E, em função dos parâmetros k, q, M e L, do sistema.

c) Ao identificar o potencial efetivo para o movimento radial como

$$V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} - \frac{q}{2r^2},$$

verifique sob quais condições sobre as constantes q, L e M, a coordenada radial da órbita circular obedece uma configuração de equilíbrio estável.

d) No caso da coordenada radial da partícula se deslocar da condição de equilíbrio (estável) e passar a oscilar de forma aproximadamente harmônica (em torno do raio da órbita circular), encontre a relação entre o período de oscilação radial e o período de revolução (movimento angular) em função das constantes q, M e L.

Q8. Seja um sistema composto por um par $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ de spins 1/2 descrito pelo estado

$$|\psi\rangle = \alpha|\mathbf{A}_+\rangle \otimes |\mathbf{B}_-\rangle + \beta|\mathbf{A}_-\rangle \otimes |\mathbf{B}_+\rangle + \gamma|\mathbf{A}_-\rangle \otimes |\mathbf{B}_-\rangle + \delta|\mathbf{A}_+\rangle \otimes |\mathbf{B}_+\rangle$$

(com $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{C}$) pertencente ao espaço de Hilbert $\mathcal{H}_\mathbf{A} \otimes \mathcal{H}_\mathbf{B}$, onde o estado $|\mathbf{A}_\pm\rangle$ satisfaz $\langle\mathbf{A}_\pm|\mathbf{A}_\pm\rangle = 1$, $\langle\mathbf{A}_\pm|\mathbf{A}_\mp\rangle = 0$ e

$$\hat{S}_z^\mathbf{A}|\mathbf{A}_\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\mathbf{A}_\pm\rangle, \quad \hat{S}_\mp^\mathbf{A}|\mathbf{A}_\pm\rangle = \hbar|\mathbf{A}_\mp\rangle, \quad \hat{S}_\pm^\mathbf{A}|\mathbf{A}_\pm\rangle = 0.$$

E analogamente para $|\mathbf{B}_\pm\rangle$. Lembrando que

$$\hat{S}_z \equiv \hat{S}_z^\mathbf{A} \otimes \hat{I}^\mathbf{B} + \hat{I}^\mathbf{A} \otimes \hat{S}_z^\mathbf{B}$$

assim como

$$\hat{S}_x \equiv \hat{S}_x^\mathbf{A} \otimes \hat{I}^\mathbf{B} + \hat{I}^\mathbf{A} \otimes \hat{S}_x^\mathbf{B}, \quad \hat{S}_y \equiv \hat{S}_y^\mathbf{A} \otimes \hat{I}^\mathbf{B} + \hat{I}^\mathbf{A} \otimes \hat{S}_y^\mathbf{B}$$

com $I^\mathbf{A}$,$I^\mathbf{B}$ sendo operadores identidade atuando nos respectivos espaços de Hilbert, responda:

a) Qual é a dimensão do espaço de Hilbert $\mathcal{H}_\mathbf{A} \otimes \mathcal{H}_\mathbf{B}$ do par de spins $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$?

b) Seja o estado $|\psi\rangle$ com $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Qual é o valor de $\delta \in \mathbb{C}$ mais geral que normaliza $|\psi\rangle$.

c) Seja o estado $|\psi\rangle$ com $\alpha = -\beta = 1/\sqrt{2}$ e $\gamma = \delta = 0$. Qual é o valor esperado do operador $\hat{S}_z$ nesse estado?

d) Seja o estado $|\psi\rangle$ com $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ e $\gamma = \delta = 0$. Determine se $|\psi\rangle$ é um auto-estado do operador de spin $\hat{S}^2 \equiv \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$. Se for, qual é o auto-valor correspondente? (Sugestão: lembrar que $\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$ e que $\left[\hat{S}_x,\hat{S}_y\right] = i\hbar\hat{S}_z$.)

Q9. Seja um oscilador harmônico com frequência ω, massa m e com hamiltoniana

$$\hat{H} = (1/2 + \hat{n})\hbar\omega, \tag{5}$$

onde $\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$ com $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$ e lembramos que os operadores de abaixamento e levantamento satisfazem

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$
$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

Supondo que o oscilador esteja em um estado coerente $|z\rangle$ definido por

$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle,$$

responda

a) Qual é o valor de $\langle z|\hat{n}|z\rangle$ para $z = \frac{1}{2}\exp(i\pi/4)$, supondo que $|z\rangle$ esteja normalizado?

b) Supondo que em $t = 0$ o oscilador esteja no estado fundamental $|0\rangle$, calcule a forma do estado no instante $t = 1/10$ s para $\omega = 5\pi$ s^{-1}.

c) Quanto vale c_n (como função de n e z) para que o estado coerente $|z\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n|n\rangle$ (expandido na base de auto-estados $|n\rangle$ do operador número $\hat{n}$) esteja normalizado? (Lembre-se que $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n/n!$)

d) Use o resultado do item anterior e calcule o valor numérico de $|\langle z'|z\rangle|^2$ para $z = 1/2\exp(i\pi/4)$ e $z' = 1/4\exp(i\pi/4)$.

Q10. Considere um sistema de N spins 1/2 não-interagentes, com momento de dipolo magnético de módulo μ, na presença de um campo magnético uniforme B.

a) Escreva a hamiltoniana do sistema.

b) Considerando o sistema em equilíbrio térmico a temperatura inversa $\beta = 1/k_B T$, calcule a função de partição $Z(\beta,B)$.

c) Calcule a magnetização M como função de T e B.

d) Obtenha a expressão para M no limite de altas temperaturas e campo magnético fraco.