

# EUF

## Exame Unificado das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2016

05 de abril de 2016

Parte 1

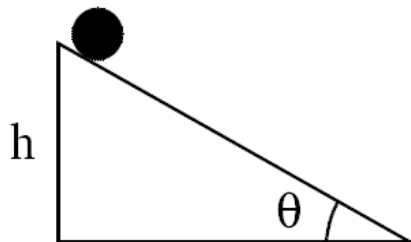
---

### Instruções

- **Não escreva seu nome na prova.**  
Ela deverá ser identificada apenas através do código (**EUFXxx**).
  - Esta prova contém problemas de:  
mecânica clássica, física moderna, mecânica quântica e termodinâmica.  
Todas as questões têm o mesmo peso.
  - O tempo de duração desta prova é de **4 horas**.  
O tempo mínimo de permanência na sala é de 90 minutos.
  - Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
  - **Resolva cada questão na folha correspondente do caderno de respostas.**  
As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação (EUFXxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
  - Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
  - **Não escreva nada no formulário.**  
Devolva tanto o caderno de questões quanto o formulário ao fim da prova. O formulário será utilizado novamente na prova de amanhã.
- 

**Boa prova!**

- Q1. Uma esfera de bronze s3lida de massa  $m$  e raio  $r$  rola sem deslizar ao longo de um plano inclinado ap3s ser solta do repouso de uma altura  $h$ . O momento de in3rcia da esfera em rela33o a um eixo que passa pelo seu centro 3  $I = 2mr^2/5$  e a acelera33o da gravidade 3  $g$ . O plano inclinado forma um 3ngulo  $\theta$  com a horizontal, como mostra a figura.



- (a) H3 atrito entre a esfera e o plano inclinado? Como voc3 chegou a essa conclus3o?
- (b) H3 conserva33o de energia mec3nica? Justifique sua resposta levando em considera33o o respondido no item (a).
- (c) Utilizando considera333es de energia, determine a velocidade com que a esfera atinge a base do plano inclinado.
- (d) Obtenha a velocidade na base do plano inclinado j3 calculada no item (c) utilizando agora considera333es de din3mica (ou seja, aplicando a segunda lei de Newton).
- Q2. Considere uma massa  $m$  presa 3 extremidade de uma haste inextens3vel de massa desprez3vel e comprimento  $l$ . A outra extremidade da haste est3 presa a um ponto fixo e o sistema haste-massa move-se em um plano vertical num local onde a acelera33o da gravidade 3  $g$ .
- (a) Escreva a Lagrangiana do sistema.
- (b) Obtenha a equa33o de movimento que descreve o sistema.
- (c) Determine os pontos de equil3brio do sistema e classifique-os quanto 3 estabilidade, justificando suas respostas.
- (d) Encontre a frequ3ncia de pequenas oscila333es em torno do ponto de equil3brio est3vel.
- Q3. No processo Compton de espalhamento relativ3stico, um f3ton de energia-momento  $(E_0, \vec{p}_0)$  incide sobre um el3tron de massa  $m$  em repouso. 3 observado um f3ton emergente em uma dire33o que forma um 3ngulo  $\theta$  com a dire33o de incid3ncia, com energia-momento  $(E, \vec{p})$ .
- (a) Denotando o momento do el3tron espalhado por  $\vec{p}_e$ , escreva as equa333es para a conserva333o de energia-momento.
- (b) Obtenha a rela33o
- $$\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} = \frac{1}{mc^2} (1 - \cos \theta).$$
- (c) Supondo que o comprimento de onda do f3ton incidente seja  $\lambda_0$ , determine o comprimento de onda do f3ton espalhado quando  $\theta = \pi/2$ .
- (d) Nas mesmas condi333es do item anterior, qual 3 a energia cin3tica do el3tron espalhado? Expresse a resposta em termos de  $\lambda_0$ ,  $\lambda_C \equiv h/(mc)$  e constantes universais.

- Q4. Considere a dinâmica quântica unidimensional de uma partícula de massa  $m$  sob a ação de um potencial harmônico. Seu Hamiltoniano é dado por

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right),$$

onde  $\omega$  é a frequência angular do oscilador e

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}.$$

Os auto-estados  $|n\rangle$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) do Hamiltoniano são não-degenerados, são auto-estados do operador número  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$  e satisfazem as relações

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

- (a) Calcule os elementos de matriz dos operadores  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  na base dos auto-estados do Hamiltoniano.  
 (b) Calcule o valor esperado do operador  $\hat{x}^2$  para um auto-estado qualquer  $|n\rangle$ .  
 (c) Calcule a razão entre a energia total média e a energia potencial média para um auto-estado qualquer  $|n\rangle$ .  
 (d) Use a equação de movimento dos operadores na representação de Heisenberg

$$i\hbar\frac{d\hat{O}_H(t)}{dt} = [\hat{O}_H(t), \hat{H}],$$

onde  $\hat{O}_H(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{O}e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ , para obter a evolução temporal do operador  $\hat{a}_H(t)$ .

- Q5. Uma máquina térmica de um gás ideal monoatômico funciona de acordo com um ciclo que tem inicialmente uma expansão adiabática partindo de um estado  $A$  de volume  $V_0$  até um estado  $B$  cujo volume é  $rV_0$  (com  $r > 1$ ). O processo é seguido por uma contração isotérmica de  $B$  até o estado  $C$ , que possui o mesmo volume de  $A$ . Finalmente, o ciclo se completa por uma compressão isovolumétrica de  $C$  até  $A$ .
- (a) Represente no diagrama  $P - V$  o ciclo realizado por esta máquina térmica.  
 (b) Calcule (i) o trabalho total realizado pelo gás e (ii) o calor injetado no gás, ambos durante um ciclo completo. Deixe sua resposta em função de  $r$ ,  $\gamma \equiv c_P/c_V$  e das temperaturas extremas  $T_{\max}$  e  $T_{\min}$ , que são, respectivamente, as temperaturas máxima e mínima entre as quais o ciclo opera. Lembre-se de que  $c_P - c_V = R$ .  
 (c) Determine o rendimento do ciclo.  
 (d) Escreva o rendimento do ciclo apenas em função de  $T_{\max}$  e  $T_{\min}$  (caso já não o tenha feito no item (c)). Considere o caso em que  $T_{\max} = 2T_{\min} > 0$ . Determine a razão entre o rendimento desta máquina e o rendimento de um ciclo de Carnot. Qual tem o maior rendimento? Isso faz sentido com o que se espera da segunda lei da termodinâmica? Justifique sua resposta.

**EU**F

**Exame Unificado  
das Pós-graduações em Física**

Para o segundo semestre de 2016

05-06 de abril de 2016

**FORMULÁRIO**

Não escreva nada neste formulário. Devolva-o ao final da prova.

# Constantes físicas

Velocidade da luz no vácuo	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s} = 4,14 \times 10^{-15} \text{ eV s}$ $\hbar = h/2\pi = 1,06 \times 10^{-34} \text{ J s} = 6,58 \times 10^{-16} \text{ eV s}$ $hc \simeq 1240 \text{ eV nm} = 1240 \text{ MeV fm}$ $\hbar c \simeq 200 \text{ eV nm} = 200 \text{ MeV fm}$
Constante de Wien	$W = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m K}$
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 = 12,6 \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$
Permissividade elétrica do vácuo	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$
Constante gravitacional	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
Carga elementar	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Massa do elétron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} = 511 \text{ keV}/c^2$
Comprimento de onda Compton	$\lambda_C = 2,43 \times 10^{-12} \text{ m}$
Massa do próton	$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg} = 938 \text{ MeV}/c^2$
Massa do nêutron	$m_n = 1,675 \times 10^{-27} \text{ kg} = 940 \text{ MeV}/c^2$
Massa do dêuteron	$m_d = 3,344 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1.876 \text{ MeV}/c^2$
Massa da partícula $\alpha$	$m_\alpha = 6,645 \times 10^{-27} \text{ kg} = 3.727 \text{ MeV}/c^2$
Constante de Rydberg	$R_H = 1,10 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ , $R_H hc = 13,6 \text{ eV}$
Raio de Bohr	$a_0 = 5,29 \times 10^{-11} \text{ m}$
Constante de Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$
Constante universal dos gases	$R = 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

Raio do Sol	=	$6,96 \times 10^8 \text{ m}$	Massa do Sol	=	$1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Raio da Terra	=	$6,37 \times 10^6 \text{ m}$	Massa da Terra	=	$5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$
Distância Sol-Terra	=	$1,50 \times 10^{11} \text{ m}$			

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg} \quad 1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J} \quad 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m} \quad 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$$

# Constantes numéricas

$\pi \cong 3,142$	$\ln 2 \cong 0,693$	$\cos(30^\circ) = \sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2 \cong 0,866$
$e \cong 2,718$	$\ln 3 \cong 1,099$	$\sin(30^\circ) = \cos(60^\circ) = 1/2$
$1/e \cong 0,368$	$\ln 5 \cong 1,609$	
$\log_{10} e \cong 0,434$	$\ln 10 \cong 2,303$	

# Mecânica Clássica

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j \quad T_R = \sum_{ij} \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j \quad I = \int r^2 dm$$

$$\mathbf{r} = r \hat{e}_r \quad \mathbf{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad \mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{e}_\theta$$

$$\mathbf{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z \quad \mathbf{v} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \dot{z} \hat{e}_z \quad \mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \hat{e}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi}) \hat{e}_\varphi + \ddot{z} \hat{e}_z$$

$$\mathbf{r} = r \hat{e}_r \quad \mathbf{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\varphi \quad \mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \hat{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{e}_\theta + (r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + 2 r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta) \hat{e}_\varphi$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad V(r) = - \int_{r_0}^r F(r') dr' \quad V_{\text{efetivo}} = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$\int_{R_0}^R \frac{dr}{\sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}}} = \sqrt{\frac{2}{m}} (t - t_0) \quad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = - \frac{m}{L^2 u^2} F(1/u), \quad u = \frac{1}{r}; \quad \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 = \frac{2m}{L^2} [E - V(1/u)]$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad L = T - V \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^N F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \quad Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$\left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)_{\text{fixo}} = \left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)_{\text{rotação}} + 2 \boldsymbol{\omega} \times \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{\text{rotação}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$$

$$H = \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - L; \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad \dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k}; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

# Eletrromagnetismo

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q/\epsilon_0 = 1/\epsilon_0 \int \rho dV \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r^2}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r}$$

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{e}}_r}{r^2}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_P \quad \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\sigma_P$$

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_M \quad \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{K}_M$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H}$$

# Relatividade

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$x' = \gamma(x - Vt)$$

$$t' = \gamma(t - Vx/c^2)$$

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)}$$

$$E = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + K$$

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{V}$$

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2}$$

# Mecânica Quântica

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = H\Psi(x,t)$$

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$[x, p_x] = i\hbar$$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} + i \frac{\hat{p}}{m\omega} \right)$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$L_\pm = L_x \pm iL_y$$

$$L_\pm Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_{\ell, m \pm 1}(\theta, \varphi)$$

$$L_z = x p_y - y p_x$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad [L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

$$E_n^{(1)} = \langle n | \delta H | n \rangle$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | \delta H | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}, \quad \phi_n^{(1)} = \sum_{m \neq n} \frac{\langle m | \delta H | n \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \phi_m^{(0)}$$

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\psi}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3r e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} \psi(\vec{r})$$

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3p e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} \bar{\psi}(\vec{p})$$

$$e^{\hat{A}} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\hat{A}^n}{n!}$$

# Física Moderna

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$E_n = -Z^2 \frac{hcR_H}{n^2}$$

$$R_T = \sigma T^4$$

$$\lambda_{\max} T = W$$

$$L = mvr = n\hbar$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \theta)$$

$$n\lambda = 2d \sin \theta$$

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$$

$\langle E \rangle = \frac{\sum E_n P(E_n)}{\sum P(E_n)}$ , onde  $P(E_n)$  é a função de distribuição.



# Termodinâmica e Mecânica Estatística

$$dU = dQ - dW \qquad dU = TdS - pdV + \mu dN$$

$$dF = -SdT - pdV + \mu dN \qquad dH = TdS + Vdp + \mu dN$$

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN \qquad d\Phi = -SdT - pdV - Nd\mu$$

$$F = U - TS \qquad G = F + pV$$

$$H = U + pV \qquad \Phi = F - \mu N$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,N} = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{V,N} \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,N}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{S,N} = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{p,N} \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,N} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,N}$$

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} \qquad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N}$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N} \qquad C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{p,N} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,N}$$

Gás ideal:  $pV = nRT$ ,  $U = C_V T = nc_V T$ ,  
 Processo adiabático:  $pV^\gamma = \text{const.}$ ,  $\gamma = c_p/c_V = (c_V + R)/c_V$

$$S = k_B \ln W$$

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} \qquad Z = \int d\gamma e^{-\beta E(\gamma)} \qquad \beta = 1/k_B T$$

$$F = -k_B T \ln Z \qquad U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

$$\Xi = \sum_N Z_N e^{\beta \mu N} \qquad \Phi = -k_B T \ln \Xi$$

$$f_{\text{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \qquad f_{\text{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}$$

# Resultados matemáticos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1.3.5 \dots (2n+1)}{(2n+1)2^n a^n} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1) \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{1/2}} = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) \quad \ln N! \approx N \ln N - N$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{(a^2 \sqrt{x^2 + a^2})} \quad \int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \quad \int \frac{dx}{x(x-1)} = \ln(1-1/x)$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \quad \int \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{e^z + 1} dz = (1 - 2^{1-x}) \Gamma(x) \zeta(x) \quad (x > 0)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{e^z - 1} dz = \Gamma(x) \zeta(x) \quad (x > 1)$$

$$\Gamma(2) = 1 \quad \Gamma(3) = 2 \quad \Gamma(4) = 6 \quad \Gamma(5) = 24 \quad \Gamma(n) = (n-1)! \\ \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1,645 \quad \zeta(3) = 1,202 \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} = 1,082 \quad \zeta(5) = 1,037$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \pi \delta_{m,n} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \pi \delta_{m,n}$$

$$dx dy dz = \rho d\rho d\phi dz \quad dx dy dz = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$$

$$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \quad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad Y_{2,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi} \quad Y_{2,\pm 2} = \mp \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$$

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

Solução geral para a equação de Laplace em coordenadas esféricas, com simetria azimutal:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) &= 0 & \nabla \times \nabla f &= 0 \\
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V} \\
\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV & \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}
\end{aligned}$$

*Coordenadas cartesianas*

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla \times \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{e}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{e}_z \\
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z & \nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

*Coordenadas cilíndricas*

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla \times \mathbf{A} &= \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \hat{e}_\rho + \left[ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \hat{e}_\varphi + \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_z \\
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z & \nabla^2 f &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

*Coordenadas esféricas*

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\varphi)}{\partial \varphi} \\
\nabla \times \mathbf{A} &= \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_r \\
&\quad + \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right] \hat{e}_\theta + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\varphi \\
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

# EU F

## Exame Unificado das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2016

06 de abril 2016

Parte 2

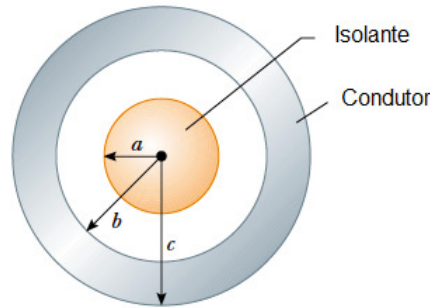
---

### Instruções

- **Não escreva seu nome na prova.**  
Ela deverá ser identificada apenas através do código (**EU Fxxx**).
  - Esta prova contém problemas de:  
eletromagnetismo, mecânica quântica, física moderna e mecânica estatística.  
Todas as questões têm o mesmo peso.
  - O tempo de duração desta prova é de **4 horas**.  
O tempo mínimo de permanência na sala é de 90 minutos.
  - Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
  - **Resolva cada questão na folha correspondente do caderno de respostas.**  
As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação (EU Fxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
  - Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
  - **Não escreva nada no formulário.**  
Devolva tanto o caderno de questões quanto o formulário ao fim da prova.
- 

**Boa prova!**

- Q6. Uma esfera isolante s3lida de raio  $a$  tem densidade de carga uniforme  $\rho$  e carga total  $Q$ . Uma esfera oca condutora n3o carregada, cujos raios interno e externo s3o  $b$  e  $c$ , respectivamente, 3 conc3ntrica 3 a esfera isolante, como mostra a figura abaixo.



- (a) Determine a magnitude do campo el3trico nas regi3es:  
 (i)  $r < a$ ; (ii)  $a < r < b$ ; (iii)  $b < r < c$  e (iv)  $r > c$ .  
 (b) Ache a carga induzida por unidade de 3rea nas superf3cies interna e externa do condutor.  
 (c) Esboce o gr3fico da magnitude do campo el3trico  $E$  versus  $r$ . Identifique em seu gr3fico cada uma das regi3es citadas no item (a).
- Q7. Considere as equa33es de Maxwell na forma diferencial e resolva cada item abaixo.

- (a) Derive, mostrando todos os passos, as equa33es de onda no v3cuo em sua forma vetorial para os campos el3trico e magn3tico. Lembre-se:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V} \quad \text{e} \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = 0$$

- (b) Escreva a equa33o de onda para uma fun33o escalar qualquer  $f(\vec{r}, t)$  e, comparando com as express3es obtidas no item (a), determine a velocidade de propaga33o para ambos os campos.  
 (c) Uma poss3vel solu33o da equa33o obtida no item (a) 3 a solu33o do tipo onda plana linearmente polarizada. Suponha um campo eletromagn3tico do tipo onda plana linearmente polarizada que esteja se propagando na dire33o  $\hat{z}$ . Considerando que  $\omega$  3 a frequ3ncia angular,  $k$  o n3mero de onda,  $E_0$  e  $B_0$  as amplitudes dos campos el3trico e magn3tico, respectivamente, escreva explicitamente qual 3 o m3dulo e a dire33o de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  em fun33o da posi33o e do tempo.  
 (d) Partindo agora das equa33es de Maxwell na presen3a de cargas e correntes, derive a equa33o que relaciona as densidades de carga e de corrente el3trica (equa33o da continuidade). Que lei de conserva33o 3 expressa matematicamente por esta equa33o?

- Q8. Considere uma part3cula de spin  $1/2$  sob a a33o de um campo magn3tico uniforme  $\vec{B} = B\hat{z}$ . O Hamiltoniano para este problema 3 dado por

$$\hat{H} = -\gamma B \hat{S}_z,$$

onde  $\gamma$  3 uma constante. Sejam os estados  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$  tais que  $\hat{S}_z |\pm\rangle = \pm(\hbar/2) |\pm\rangle$ .

- (a) Quais s3o os auto-valores do Hamiltoniano?  
 (b) No instante  $t = 0$  a part3cula se encontra no estado  $|\psi(0)\rangle = [|+\rangle - |-\rangle]/\sqrt{2}$ . Calcule o estado da part3cula em um instante  $t > 0$  qualquer.  
 (c) Calcule a m3dia dos operadores  $\hat{S}_x$ ,  $\hat{S}_y$  e  $\hat{S}_z$  para qualquer instante  $t \geq 0$ . Lembre-se de que  $\hat{S}_x |\pm\rangle = (\hbar/2) |\mp\rangle$  e  $\hat{S}_y |\pm\rangle = \pm i(\hbar/2) |\mp\rangle$ .  
 (d) Qual 3 o menor valor de  $t > 0$  para o qual o estado volta a ser igual ao estado inicial?

Q9. Se dois eventos no espaço-tempo são separados espacialmente pelo vetor  $\Delta x \hat{x} + \Delta y \hat{y} + \Delta z \hat{z}$  e temporalmente por  $\Delta t$ , o intervalo invariante entre eles, cujo valor independe do referencial inercial, é definido como

$$\Delta s^2 \equiv \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2.$$

(a) Eventos (1) e (2) ocorrem em posições **distintas**  $(x_1, y_1, z_1)$  e  $(x_2, y_2, z_2)$ , respectivamente, de um dado referencial inercial (S) e são tais que o intervalo invariante é positivo. Existe um referencial inercial onde tais eventos ocorrem em um mesmo ponto do espaço? Justifique.

(b) Nas mesmas condições do item (a), o evento (2) poderia ter sido causado pelo evento (1)? Justifique sua resposta considerando a propagação de um sinal de (1) para (2) com velocidade  $\vec{V} = V_x \hat{x} + V_y \hat{y} + V_z \hat{z}$ .

(c) Um relógio está em repouso em um referencial (S') que se move com velocidade  $\vec{V}$  em relação a (S).

(i) Qual é o sinal do intervalo invariante entre eventos que caracterizam duas posições sucessivas dos "ponteiros do relógio" (desconsidere as dimensões espaciais do relógio)?

(ii) Obtenha a relação entre o intervalo de tempo próprio  $\Delta t'$  (medido em S') e o intervalo de tempo  $\Delta t$  medido em (S).

(d) A separação espacial entre uma fonte  $F$  e um detector  $D$  de partículas é  $L\hat{x}$ , no referencial do laboratório (referencial S). Considere os eventos  $E_F$  e  $E_D$ , de produção e detecção de uma partícula, respectivamente. Suponha que essa partícula se mova de  $F$  a  $D$  com velocidade constante  $\vec{V} = V_0 \hat{x}$  no referencial do laboratório.

(i) Quais são as separações no espaço  $\Delta x$  e no tempo  $\Delta t$  entre  $E_F$  e  $E_D$  no referencial do laboratório?

(ii) Seja  $L'$  a distância entre  $F$  e  $D$  no referencial da partícula. Quais são as separações no espaço  $\Delta x'$  e no tempo  $\Delta t'$  entre  $E_F$  e  $E_D$  no referencial da partícula?

(iii) Determine a relação entre  $L'$  e  $L$ .

Q10. Num modelo para um cristal sólido podemos supor que os  $N$  átomos sejam equivalentes a  $3N$  osciladores harmônicos clássicos, unidimensionais, independentes, de massa  $m$ , que oscilam com a mesma frequência angular  $\omega$  em torno de sua posição de equilíbrio. A uma distância  $x$  desta posição a energia potencial é dada por  $U = m\omega^2 x^2/2$ . Conhecendo-se alguns dados experimentais, é possível estimar, em termos da distância inter-atômica a baixas temperaturas  $d$ , a raiz do deslocamento quadrático médio dos átomos quando ocorre a fusão. A resolução dos itens abaixo permite fazer esta estimativa. Suponha que o sólido se encontre em equilíbrio térmico a uma temperatura absoluta  $T$ .

(a) Considere que o número de estados numa célula do espaço de fase  $(x,p)$  seja dado por  $(dx dp)/h$ , onde  $h$  é a constante de Planck. Obtenha a função de partição para o oscilador harmônico,  $Z(T, \omega)$ .

(b) Calcule o número médio de osciladores cuja posição se encontra entre  $x$  e  $x + dx$ .

(c) Obtenha uma expressão para a energia potencial média,  $\langle U \rangle$  por oscilador unidimensional. Compare o resultado com o valor esperado pelo teorema da equipartição.

(d) Seja  $x_0^2$  o deslocamento quadrático médio em torno do equilíbrio quando o sólido se funde e seja  $f = x_0/d$ . Usando  $\langle U \rangle = m\omega^2 x_0^2/2$ , estime  $f$  para um dado elemento cuja massa atômica é  $m = 1.0 \times 10^{-25}$  kg, a temperatura de fusão é  $T_F = 1400$  K,  $d = (10/3) \text{ \AA} = (10/3) \times 10^{-10}$  m e a frequência é tal que  $\hbar\omega/k_B = 300$  K.

**EU**F

**Exame Unificado  
das Pós-graduações em Física**

Para o segundo semestre de 2016

05-06 de abril de 2016

**FORMULÁRIO**

Não escreva nada neste formulário. Devolva-o ao final da prova.

# Constantes físicas

Velocidade da luz no vácuo	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s} = 4,14 \times 10^{-15} \text{ eV s}$ $\hbar = h/2\pi = 1,06 \times 10^{-34} \text{ J s} = 6,58 \times 10^{-16} \text{ eV s}$ $hc \simeq 1240 \text{ eV nm} = 1240 \text{ MeV fm}$ $\hbar c \simeq 200 \text{ eV nm} = 200 \text{ MeV fm}$
Constante de Wien	$W = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m K}$
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 = 12,6 \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$
Permissividade elétrica do vácuo	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$
Constante gravitacional	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
Carga elementar	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Massa do elétron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} = 511 \text{ keV}/c^2$
Comprimento de onda Compton	$\lambda_C = 2,43 \times 10^{-12} \text{ m}$
Massa do próton	$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg} = 938 \text{ MeV}/c^2$
Massa do nêutron	$m_n = 1,675 \times 10^{-27} \text{ kg} = 940 \text{ MeV}/c^2$
Massa do dêuteron	$m_d = 3,344 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1.876 \text{ MeV}/c^2$
Massa da partícula $\alpha$	$m_\alpha = 6,645 \times 10^{-27} \text{ kg} = 3.727 \text{ MeV}/c^2$
Constante de Rydberg	$R_H = 1,10 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ , $R_H hc = 13,6 \text{ eV}$
Raio de Bohr	$a_0 = 5,29 \times 10^{-11} \text{ m}$
Constante de Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$
Constante universal dos gases	$R = 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

Raio do Sol	=	$6,96 \times 10^8 \text{ m}$	Massa do Sol	=	$1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Raio da Terra	=	$6,37 \times 10^6 \text{ m}$	Massa da Terra	=	$5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$
Distância Sol-Terra	=	$1,50 \times 10^{11} \text{ m}$			

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg} \quad 1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J} \quad 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m} \quad 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$$

# Constantes numéricas

$\pi \cong 3,142$	$\ln 2 \cong 0,693$	$\cos(30^\circ) = \sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2 \cong 0,866$
$e \cong 2,718$	$\ln 3 \cong 1,099$	$\sin(30^\circ) = \cos(60^\circ) = 1/2$
$1/e \cong 0,368$	$\ln 5 \cong 1,609$	
$\log_{10} e \cong 0,434$	$\ln 10 \cong 2,303$	



# Mecânica Clássica

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j \quad T_R = \sum_{ij} \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j \quad I = \int r^2 dm$$

$$\mathbf{r} = r \hat{e}_r \quad \mathbf{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad \mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{e}_\theta$$

$$\mathbf{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z \quad \mathbf{v} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \dot{z} \hat{e}_z \quad \mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \hat{e}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi}) \hat{e}_\varphi + \ddot{z} \hat{e}_z$$

$$\mathbf{r} = r \hat{e}_r \quad \mathbf{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\varphi \quad \mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \hat{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{e}_\theta + (r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + 2 r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta) \hat{e}_\varphi$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad V(r) = - \int_{r_0}^r F(r') dr' \quad V_{\text{efetivo}} = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$\int_{R_0}^R \frac{dr}{\sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}}} = \sqrt{\frac{2}{m}} (t - t_0) \quad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = - \frac{m}{L^2 u^2} F(1/u), \quad u = \frac{1}{r}; \quad \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 = \frac{2m}{L^2} [E - V(1/u)]$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad L = T - V \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^N F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \quad Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$\left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)_{\text{fixo}} = \left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)_{\text{rotação}} + 2 \boldsymbol{\omega} \times \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{\text{rotação}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$$

$$H = \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - L; \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad \dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k}; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

# Eletrromagnetismo

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q/\epsilon_0 = 1/\epsilon_0 \int \rho dV \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r^2}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r}$$

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{e}}_r}{r^2}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_P \quad \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\sigma_P$$

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_M \quad \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{K}_M$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H}$$

# Relatividade

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$x' = \gamma(x - Vt)$$

$$t' = \gamma(t - Vx/c^2)$$

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)}$$

$$E = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + K$$

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{V}$$

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2}$$

# Mecânica Quântica

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = H\Psi(x,t)$$

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$[x, p_x] = i\hbar$$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} + i \frac{\hat{p}}{m\omega} \right)$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$L_\pm = L_x \pm iL_y$$

$$L_\pm Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_{\ell, m \pm 1}(\theta, \varphi)$$

$$L_z = x p_y - y p_x$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad [L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

$$E_n^{(1)} = \langle n | \delta H | n \rangle$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | \delta H | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}, \quad \phi_n^{(1)} = \sum_{m \neq n} \frac{\langle m | \delta H | n \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \phi_m^{(0)}$$

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\psi}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3r e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} \psi(\vec{r})$$

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3p e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} \bar{\psi}(\vec{p})$$

$$e^{\hat{A}} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\hat{A}^n}{n!}$$

# Física Moderna

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$E_n = -Z^2 \frac{hcR_H}{n^2}$$

$$R_T = \sigma T^4$$

$$\lambda_{\max} T = W$$

$$L = mvr = n\hbar$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \theta)$$

$$n\lambda = 2d \sin \theta$$

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$$

$\langle E \rangle = \frac{\sum E_n P(E_n)}{\sum P(E_n)}$ , onde  $P(E_n)$  é a função de distribuição.

# Termodinâmica e Mecânica Estatística

$$dU = dQ - dW \qquad dU = TdS - pdV + \mu dN$$

$$dF = -SdT - pdV + \mu dN \qquad dH = TdS + Vdp + \mu dN$$

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN \qquad d\Phi = -SdT - pdV - Nd\mu$$

$$F = U - TS \qquad G = F + pV$$

$$H = U + pV \qquad \Phi = F - \mu N$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,N} = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{V,N} \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,N}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{S,N} = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{p,N} \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,N} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,N}$$

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} \qquad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N}$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N} \qquad C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{p,N} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,N}$$

Gás ideal:  $pV = nRT$ ,  $U = C_V T = nc_V T$ ,  
 Processo adiabático:  $pV^\gamma = \text{const.}$ ,  $\gamma = c_p/c_V = (c_V + R)/c_V$

$$S = k_B \ln W$$

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} \qquad Z = \int d\gamma e^{-\beta E(\gamma)} \qquad \beta = 1/k_B T$$

$$F = -k_B T \ln Z \qquad U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

$$\Xi = \sum_N Z_N e^{\beta \mu N} \qquad \Phi = -k_B T \ln \Xi$$

$$f_{\text{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \qquad f_{\text{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}$$

# Resultados matemáticos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1.3.5 \dots (2n+1)}{(2n+1)2^n a^n} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1) \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{1/2}} = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) \quad \ln N! \approx N \ln N - N$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{(a^2 \sqrt{x^2 + a^2})} \quad \int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \quad \int \frac{dx}{x(x-1)} = \ln(1-1/x)$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \quad \int \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{e^z + 1} dz = (1 - 2^{1-x}) \Gamma(x) \zeta(x) \quad (x > 0)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{e^z - 1} dz = \Gamma(x) \zeta(x) \quad (x > 1)$$

$$\Gamma(2) = 1 \quad \Gamma(3) = 2 \quad \Gamma(4) = 6 \quad \Gamma(5) = 24 \quad \Gamma(n) = (n-1)! \\ \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1,645 \quad \zeta(3) = 1,202 \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} = 1,082 \quad \zeta(5) = 1,037$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \pi \delta_{m,n} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \pi \delta_{m,n}$$

$$dx dy dz = \rho d\rho d\phi dz \quad dx dy dz = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$$

$$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \quad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad Y_{2,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi} \quad Y_{2,\pm 2} = \mp \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$$

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

Solução geral para a equação de Laplace em coordenadas esféricas, com simetria azimutal:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) &= 0 & \nabla \times \nabla f &= 0 \\
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V} \\
\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV & \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}
\end{aligned}$$

*Coordenadas cartesianas*

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla \times \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{e}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{e}_z \\
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z & \nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

*Coordenadas cilíndricas*

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla \times \mathbf{A} &= \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \hat{e}_\rho + \left[ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \hat{e}_\varphi + \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_z \\
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z & \nabla^2 f &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

*Coordenadas esféricas*

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\varphi)}{\partial \varphi} \\
\nabla \times \mathbf{A} &= \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_r \\
&\quad + \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right] \hat{e}_\theta + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\varphi \\
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$