

EUF

**Exame Unificado
das Pós-graduações em Física**

Para o segundo semestre de 2016

Respostas esperadas

Parte 1

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**
Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q1. (a) Sim, pois a única força capaz de gerar o torque para que a esfera role sem deslizar é o atrito.

(b) Sim, pois o atrito é estático e não realiza trabalho, uma vez que a velocidade do ponto de contato entre a esfera e o plano inclinado é nula (rolamento sem deslizamento).

(c) Tomando a base do plano como o zero de energia potencial gravitacional, a energia mecânica inicial é apenas potencial gravitacional, dada por $E_i = mgh$. Na base do plano inclinado, a energia mecânica é puramente cinética, dada pela energia cinética de translação do centro de massa (CM) mais a energia de rotação em torno do CM, ou seja, $E_f = mv^2/2 + I\omega^2/2$, onde v e ω são, respectivamente, as velocidades de translação do CM e angular na base do plano. Por conservação de energia mecânica,

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (1)$$

Como há rolamento sem deslizamento, a velocidade de translação do CM e a velocidade de rotação satisfazem $v = \omega r$. Substituindo na Eq. (1) e usando a expressão para o momento de inércia dada no enunciado obtemos

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}.$$

(d) Definimos um sistema de coordenadas com um eixo x paralelo ao plano inclinado e apontando para a base do plano e um eixo y perpendicular ao plano e apontando para cima do plano. A força resultante no eixo y é nula. No eixo x , usando a segunda lei de Newton,

$$mg \sin \theta - f_{at} = ma, \quad (2)$$

onde f_{at} é a força de atrito e a a aceleração do CM. Para o movimento de rotação

$$\tau = f_{at}r = I\alpha, \quad (3)$$

onde τ é o torque em relação a um eixo que passa pelo CM da esfera e α é sua aceleração angular. Derivando em relação ao tempo a expressão do item anterior, $v = \omega r$, obtemos $a = \alpha r$. Levando esta última relação e a Eq. (2) na Eq. (3) obtemos

$$(mg \sin \theta - ma)r = \frac{2}{5}mr^2 \frac{a}{r},$$

donde

$$a = \frac{5}{7}g \sin \theta. \quad (4)$$

Dado que a é constante, podemos usar a seguinte relação, válida para um movimento uniformemente acelerado,

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta x \\ &= 2ah/\sin \theta, \end{aligned} \quad (5)$$

onde $v_0 = 0$ é a velocidade no instante inicial e $\Delta x = h/\sin \theta$ o deslocamento no eixo x . Levando a Eq. (4) na Eq. (5)

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gh},$$

que coincide com o resultado já encontrado no item (c).

Q2. (a) Utilizaremos como coordenada generalizada o ângulo θ que a haste faz com a vertical. O módulo da velocidade da partícula é dado por $v = l\dot{\theta}$, de modo que sua energia cinética é

$$T = \frac{m(l\dot{\theta})^2}{2}.$$

A altura na vertical, em relação à posição em que $\theta = 0$, é dada por $h = l - l \cos \theta$. Segue que a energia potencial gravitacional é

$$V = mgl(1 - \cos \theta).$$

Finalmente, a Lagrangiana do sistema é

$$L = T - V = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl(1 - \cos \theta). \quad (6)$$

(b) A equação de movimento é obtida a partir da equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0.$$

Utilizando a Eq. (6) na equação acima, temos

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta.$$

(c) Nos pontos de equilíbrio, $dV/d\theta = 0$, o que nos dá $\sin \theta = 0$, ou seja, os pontos procurados são

$$\theta = 0 \text{ e } \theta = \pi.$$

Para avaliar a estabilidade dos pontos de equilíbrio, analisamos o sinal de

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mgl \cos \theta.$$

Para $\theta = 0$, a expressão acima tem valor positivo (mínimo de V), caracterizando um equilíbrio **estável**, enquanto que para $\theta = \pi$, o sinal é negativo (máximo de V), correspondendo a um ponto de equilíbrio **instável**.

(d) Para pequenas oscilações em torno de $\theta = 0$, podemos aproximar $\sin \theta \approx \theta$. A equação de movimento fica

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta,$$

cuja solução geral é, por inspeção,

$$\theta(t) = A \sin(\omega t + \delta),$$

onde A e δ são constantes arbitrárias determinadas pelas condições iniciais e

$$\omega = \sqrt{g/l},$$

que é a frequência (angular) procurada. Alternativamente, pode-se comparar a Eq. (2) com a equação de movimento de um oscilador harmônico simples uni-dimensional de frequência (angular) ω ,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

e inferir que no caso em questão teremos $\omega = \sqrt{g/l}$.

Q3. a) A conservação de energia nos dá

$$E_0 + mc^2 = \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4} + E, \quad (7)$$

enquanto a conservação de momento linear é

$$\vec{p}_0 + \vec{0} = \vec{p} + \vec{p}_e.$$

b) Da conservação de momento linear

$$p_e^2 = (\vec{p}_0 - \vec{p})^2 = p_0^2 + p^2 - 2pp_0 \cos \theta.$$

Usando que, para os fótons, $p_0 = E_0/c$ e $p = E/c$ e levando na Eq. (7)

$$E_0 + mc^2 = \sqrt{E_0^2 + E^2 - 2EE_0 \cos \theta + m^2 c^4} + E.$$

Isolando a raiz quadrada e elevando a equação ao quadrado

$$\begin{aligned} (E_0 - E + mc^2)^2 &= E_0^2 + E^2 - 2EE_0 \cos \theta + m^2 c^4 \\ E_0^2 + E^2 + m^2 c^4 - 2EE_0 + 2mc^2(E_0 - E) &= E_0^2 + E^2 - 2EE_0 \cos \theta + m^2 c^4 \\ -EE_0 + mc^2(E_0 - E) &= -EE_0 \cos \theta \\ mc^2(E_0 - E) &= EE_0(1 - \cos \theta). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} = \frac{1}{mc^2} (1 - \cos \theta)}. \quad (8)$$

c) Da relação entre a energia e o comprimento de onda dos fótons

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{e} \quad E_0 = \frac{hc}{\lambda_0},$$

onde λ é o comprimento de onda do fóton espalhado. Portanto,

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta).$$

Para $\theta = \pi/2$,

$$\boxed{\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc}}.$$

c) A energia cinética do elétron espalhado é

$$K = \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 = E_0 - E.$$

Fazendo $\theta = \pi/2$ na Eq. (8)

$$\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} = \frac{1}{mc^2},$$

donde

$$E = \frac{mc^2 E_0}{E_0 + mc^2}.$$

Assim,

$$K = E_0 \left(1 - \frac{mc^2}{E_0 + mc^2} \right) = \frac{hc}{\lambda_0} \left(1 - \frac{mc^2}{\frac{hc}{\lambda_0} + mc^2} \right).$$

Finalmente,

$$\boxed{K = \frac{hc}{\lambda_0} \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_C}}}.$$

Q4. (a) Queremos calcular $\langle n' | \hat{x} | n \rangle$ e $\langle n' | \hat{p} | n \rangle$. Utilizando que

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \hat{p},$$

obtemos

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \\ \hat{p} &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}).\end{aligned}$$

Os elementos de matriz pedidos são

$$\begin{aligned}\langle n' | \hat{x} | n \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle n' | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | n \rangle, \\ \langle n' | \hat{p} | n \rangle &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \langle n' | (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) | n \rangle.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\langle n' | \hat{a} | n \rangle &= \langle n' | \sqrt{n} | n-1 \rangle = \sqrt{n} \delta_{n',n-1}, \\ \langle n' | \hat{a}^\dagger | n \rangle &= \langle n' | \sqrt{n+1} | n+1 \rangle = \sqrt{n+1} \delta_{n',n+1},\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}\langle n' | \hat{x} | n \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n} \delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1} \delta_{n',n+1}), \\ \langle n' | \hat{p} | n \rangle &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\sqrt{n+1} \delta_{n',n+1} - \sqrt{n} \delta_{n',n-1}).\end{aligned}$$

(b) Primeiramente, escrevemos \hat{x}^2 em termos de \hat{a} e \hat{a}^\dagger

$$\hat{x}^2 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \frac{\hbar}{2m\omega} [\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2].$$

O valor esperado procurado é

$$\langle n | \hat{x}^2 | n \rangle = \langle n | \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2) | n \rangle.$$

Calculamos cada termo separadamente

$$\begin{aligned}\langle n | \hat{a}^2 | n \rangle &= \langle n | a\sqrt{n} | n-1 \rangle = \sqrt{n}\sqrt{n-1} \delta_{n,n-2} = 0, \\ \langle n | (\hat{a}^\dagger)^2 | n \rangle &= \langle n | a^\dagger\sqrt{n+1} | n+1 \rangle = \sqrt{n+1}\sqrt{n+2} \delta_{n,n+2} = 0, \\ \langle n | \hat{a}\hat{a}^\dagger | n \rangle &= \langle n | a\sqrt{n+1} | n+1 \rangle = (n+1) \langle n | n \rangle = n+1, \\ \langle n | \hat{a}^\dagger\hat{a} | n \rangle &= \langle n | a^\dagger\sqrt{n} | n-1 \rangle = n \langle n | n \rangle = n.\end{aligned}$$

Juntando todas as contribuições

$$\langle n | \hat{x}^2 | n \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} (2n+1) = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

(c) A energia total média em um auto estado do Hamiltoniano é

$$\langle n | \hat{H} | n \rangle = \hbar\omega \langle n | \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) | n \rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

onde usamos o valor esperado do operador número calculado no item anterior. A energia potencial média em um auto estado do Hamiltoniano é

$$\langle n | \hat{V} | n \rangle = \frac{1}{2} m\omega^2 \langle n | \hat{x}^2 | n \rangle.$$

Do item anterior

$$\langle n | \hat{V} | n \rangle = \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) = \frac{\hbar\omega}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Finalmente

$$\boxed{\frac{\langle n | \hat{H} | n \rangle}{\langle n | \hat{V} | n \rangle} = 2.}$$

(d) Primeiro notamos que

$$i\hbar \frac{d\hat{a}_H(t)}{dt} = [\hat{a}_H(t), \hat{H}] = e^{i\hat{H}t/\hbar} [\hat{a}, \hat{H}] e^{-i\hat{H}t/\hbar},$$

já que o Hamiltoniano comuta com as exponenciais. O comutador procurado é

$$[\hat{a}, \hat{H}] = \hbar\omega \left[\hat{a}, \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \right] = \hbar\omega [\hat{a}, \hat{a}^\dagger \hat{a}],$$

onde usamos que um número comuta com qualquer operador. Mas

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger \hat{a}] = (\hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a}^2) = (\hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{a} = [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \hat{a} = \hat{a},$$

já que $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Assim,

$$i\hbar \frac{d\hat{a}_H(t)}{dt} = \hbar\omega e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{a} e^{-i\hat{H}t/\hbar} = \hbar\omega \hat{a}_H(t).$$

Resolvendo essa equação diferencial

$$\boxed{\hat{a}_H(t) = \hat{a}(0) e^{-i\omega t} = \hat{a} e^{-i\omega t}.}$$

Q5. a) O gráfico pedido é mostrado na Fig. 5:

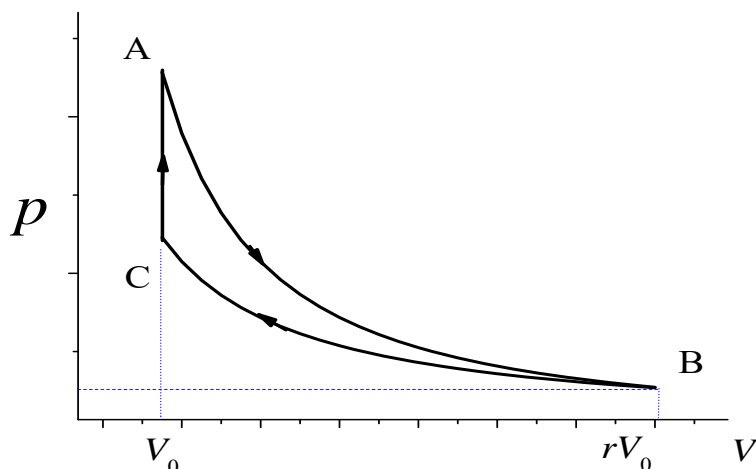


Figura 1: Gráfico esquemático mostrando o ciclo num diagrama $p \times V$.

b) (i) De maneira geral, o trabalho realizado pelo gás num processo reversível quando o volume varia de V_1 até V_2 é dado por

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Portanto, o trabalho realizado no trecho CA é nulo, pois não há variação de volume. O trecho AB é adiabático, portanto não há troca de calor Q_{AB} entre o gás e a vizinhança. Da primeira lei da termodinâmica $\Delta U = Q - W$ (U é a energia interna),

$$W_{AB} = -\Delta U_{AB} = n c_V (T_A - T_B),$$

onde usamos a expressão para a energia interna de um gás ideal. Finalmente, na isoterma BC, usando a equação de estado do gás ideal,

$$W_{BC} = \int_{rV_0}^{V_0} p dV = -nRT_B \ln r.$$

Como $T_C = T_B$ e as isotermas são hipérbolas $p = nRT/V$ num gráfico $p \times V$, segue que $T_{\min} = T_B < T_A = T_{\max}$. Logo, usando $c_V = R/(\gamma - 1)$, o trabalho total é dado por

$$W_{\text{total}} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_{\max} - T_{\min}) - nRT_{\min} \ln r.$$

(ii) Só há troca de calor entre o gás e a vizinhança nos trechos BC e CA, pois o processo AB é adiabático. Como BC é uma isoterma, a energia interna do gás se mantém constante e, usando a primeira lei,

$$Q_{BC} = W_{BC} = -nRT_B \ln r < 0,$$

o que corresponde a uma liberação de calor do gás para sua vizinhança. Na isocórica CA, o trabalho é nulo e, usando novamente a primeira lei,

$$Q_{CA} = \Delta U_{CA} = n c_V (T_A - T_C) = n c_V (T_{\max} - T_{\min}).$$

Portanto, o calor injetado no gás é

$$Q_{\text{injetado}} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_{\text{max}} - T_{\text{min}}).$$

c) O rendimento é dado por

$$\eta = \frac{W_{\text{total}}}{Q_{\text{injetado}}} = 1 - \frac{(\gamma - 1)T_{\text{min}}}{(T_{\text{max}} - T_{\text{min}})} \ln r.$$

d) Na adiabática AB temos que

$$p_A V_0^\gamma = p_B (rV_0)^\gamma \Rightarrow p_B = p_A / r^\gamma,$$

e na isoterma BC temos que

$$p_B r V_0 = p_C V_0 \Rightarrow p_C = r p_B,$$

donde

$$r = \frac{p_C}{p_B} = \frac{p_C}{p_A} r^\gamma \Rightarrow r^{\gamma-1} = \frac{p_A}{p_C}.$$

Da equação de estado dos gases ideais para a isovolumétrica CA

$$\frac{p_A}{p_C} = \frac{T_A}{T_C} = \frac{T_{\text{max}}}{T_{\text{min}}}.$$

Assim,

$$r = \left(\frac{T_{\text{max}}}{T_{\text{min}}} \right)^{1/(\gamma-1)}.$$

Levando na expressão para o rendimento,

$$\eta = 1 - \frac{T_{\text{min}}}{(T_{\text{max}} - T_{\text{min}})} \ln \left(\frac{T_{\text{max}}}{T_{\text{min}}} \right).$$

Se $T_{\text{max}} = 2T_{\text{min}}$, temos que

$$\eta = 1 - \ln 2 \approx 0.31,$$

e o rendimento da máquina de Carnot correspondente é

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}} = 0.5,$$

de forma que

$$\frac{\eta}{\eta_{\text{Carnot}}} = 2(1 - \ln 2).$$

O rendimento da máquina é menor do que o da máquina de Carnot correspondente. Isso é o esperado porque uma das consequências da segunda lei da termodinâmica é que nenhuma máquina operando entre dois reservatórios a temperaturas T_{max} e T_{min} pode ter rendimento maior que a máquina de Carnot entre esses reservatórios.

EUF

**Exame Unificado
das Pós-graduações em Física**

Para o segundo semestre de 2016

Respostas esperadas

Parte 2

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**
Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q6. a) Pela lei de Gauss, de maneira geral, sabemos que:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_V}{\epsilon_0}, \quad (9)$$

onde a integral é feita sobre a superfície S de uma região V e q_V é a carga total contida em V . Tomaremos, nessa questão, regiões esféricas de raio r centradas no centro da esfera isolante. Por simetria, o campo elétrico apontará sempre na direção radial, ou seja, $\vec{E} = E\hat{r}$.

i) Campo elétrico para $r < a$: Neste sub-item, escolhemos regiões esféricas de raio $r < a$, representadas pelas linhas pontilhadas na Fig. 2. Desta forma, a carga em V é

$$\begin{aligned} q_V &= \rho V, \\ q_V &= \frac{4\pi\rho}{3}r^3. \end{aligned}$$

Aplicando a Eq. (9) e usando que o campo elétrico é radial

$$E4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho}{3\epsilon_0}r^3.$$

Portanto, a magnitude do campo elétrico será dada por

$$\boxed{E = \frac{\rho}{3\epsilon_0}r.}$$

ii) Campo elétrico para $a < r < b$: Neste caso, as regiões esféricas tem raio r tal que $a < r < b$, como mostrado na Fig. 3. A carga total contida em V é $q_V = Q$. Aplicando a Eq. (9) e usando que o campo elétrico é radial

$$E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Portanto, a magnitude do campo elétrico será

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

iii) Campo elétrico para $b < r < c$: Nesta região, queremos o campo elétrico dentro de um condutor em equilíbrio eletrostático (veja a Fig. 4), que sempre se anula. Portanto,

$$\boxed{E = 0.}$$

(iv) Campo elétrico para $r > c$: Agora, as regiões esféricas tem raio $r > c$, como mostrado na Fig. 5. A carga contida em V é $q_V = Q$. Aplicando novamente a Eq. (9) e usando que o campo elétrico é radial

$$E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Portanto, a magnitude do campo elétrico será

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

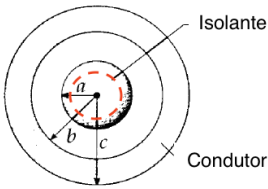


Figura 2: Região V no caso (i) $r < a$.

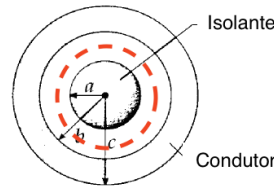


Figura 3: Região V no caso (ii) $a < r < b$.

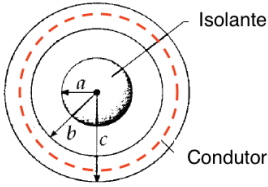


Figura 4: Região V no caso (iii) $b < r < c$.

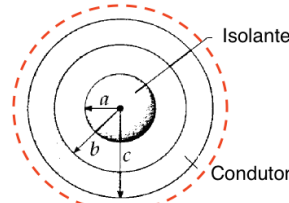


Figura 5: Região V no caso (iv) $r > c$.

b) Em todo condutor em equilíbrio eletrostático, a carga líquida se distribui na sua superfície. Vamos denotar por q_1 a carga induzida na superfície interna do condutor ($r = b$) e q_2 a carga induzida na superfície externa do condutor ($r = c$). Como dentro do condutor temos $E = 0$, aplicando a Eq. (9) a uma região como as do item (a)(iii) (raio r , tal que $b < r < c$), a carga total em V nesse caso é nula. Portanto,

$$\begin{aligned} q_V &= Q + q_1 = 0 \\ \Rightarrow q_1 &= -Q. \end{aligned}$$

Como, por simetria, a carga se distribui de maneira uniforme na superfície, segue que a densidade de carga induzida em $r = b$ é

$$\sigma_1 = -\frac{Q}{4\pi b^2}.$$

Como o condutor está descarregado, por conservação de carga, temos que

$$\begin{aligned} Q_{condutor} = 0 &= q_1 + q_2 \\ q_2 &= -q_1 \end{aligned}$$

Usando novamente que, por simetria, a carga se distribui de maneira uniforme na superfície, a densidade de carga induzida em $r = c$ é

$$\sigma_2 = \frac{Q}{4\pi c^2}.$$

c) Esboço do gráfico $E \times r$:

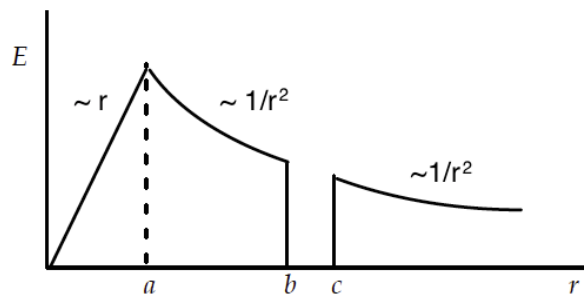


Figura 6: Esboço do gráfico $E \times r$.

Q7. a) Pelo formulário podemos ver que no vácuo (onde $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$), as equações de Maxwell são dadas por

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0; \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad (11)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (12)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (13)$$

Tomando o rotacional da Eq. (12) temos que

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = 0. \quad (14)$$

Utilizando a primeira identidade vetorial dada no enunciado juntamente com a Eq. (10), podemos re-escrever o primeiro termo do lado esquerdo da equação acima como

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}.$$

Desta forma a Eq. (14) pode ser re-escrita, trocando a ordem das derivadas parciais, como

$$-\nabla^2 \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) = 0.$$

Utilizando a Eq. (13) obtemos a equação da onda para o campo elétrico

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.}$$

Tomando agora o rotacional da Eq. (13) temos que

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0.$$

Utilizando a primeira identidade vetorial dada no enunciado juntamente com a Eq. (11) e trocando a ordem das derivadas parciais, podemos re-escrever a equação acima como

$$-\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) = 0. \quad (15)$$

Finalmente, utilizando a Eq. (12) no segundo termo da Eq. (15) obtemos

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.}$$

b) A equação de onda para uma função $f(\vec{r}, t)$ se propagando com velocidade v é dada por

$$\boxed{\nabla^2 f(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(\vec{r}, t)}{\partial t^2}.} \quad (16)$$

Comparando com as Eqs. (15) e (16), notamos que a velocidade de propagação de \vec{E} e \vec{B} é dada por

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0 \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c.} \quad (17)$$

c) **(0,2 pontos)** Supondo que \vec{E} aponte na direção \hat{x} e se propague na direção \hat{z} , podemos escrever que

$$\vec{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{x}, \quad (18)$$

$$\vec{B} = B_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{y}. \quad (19)$$

O campos “físicos” podem ser escritos como (supondo E_0 e B_0 reais)

$$\vec{E}_f = \text{Re}(\vec{E}) = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{x}, \quad (20)$$

$$\vec{B}_f = \text{Re}(\vec{B}) = B_0 \cos(kz - \omega t) \hat{y}. \quad (21)$$

Essas soluções, de fato, satisfazem as quatro Eqs. (10-13) desde que $\omega = ck$, como pode ser verificado. De maneira geral, a direção de \vec{E} é arbitrária, desde que seja perpendicular a \vec{z} . Uma vez fixada a direção de \vec{E} , \vec{B} tem que ser perpendicular a \vec{E} e \vec{z} . Os *módulos* de \vec{E} e \vec{B} são:

$$E = E_0 \cos(kz - \omega t),$$

$$B = B_0 \cos(kz - \omega t).$$

d) Tomando a divergência da Eq. (13) temos

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{E}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J}. \quad (22)$$

O primeiro termo se anula pela segunda identidade dada no enunciado. Usando a Eq. (10)

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0}$$

Esta equação expressa a *lei de conservação da carga*: em sua forma integral, ela implica que a taxa de variação temporal da carga total incluída em uma região espacial fixa é igual ao fluxo de corrente elétrica entrando pela superfície que delimita a região.

Q8. (a) Das relações fornecidas

$$\hat{H}|\pm\rangle = -\gamma B \hat{S}_z |\pm\rangle = \mp \frac{\gamma B \hbar}{2} |\pm\rangle$$

Portanto, $|\pm\rangle$ são auto-vetores do Hamiltoniano com auto-valores dados, respectivamente, por

$$E_{\pm} = \mp \frac{\gamma \hbar B}{2}.$$

(b) De maneira geral,

$$|\psi(t)\rangle = [c_+ e^{-i(E_+/\hbar)t} |+\rangle + c_- e^{-i(E_-/\hbar)t} |-\rangle],$$

onde c_{\pm} são coeficientes determinados pelas condições iniciais. Usando as expressões dos auto-valores do item anterior

$$|\psi(t)\rangle = \left[c_+ e^{i\frac{\gamma B}{2}t} |+\rangle + c_- e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} |-\rangle \right].$$

Em $t = 0$ temos

$$|\psi(t=0)\rangle = [c_+ |+\rangle + c_- |-\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle - |-\rangle],$$

donde $c_+ = -c_- = 1/\sqrt{2}$. Portanto,

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t} |+\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} |-\rangle \right].$$

(c) A média de \hat{S}_i é dada por

$$\langle \hat{S}_i \rangle = \langle \psi(t) | \hat{S}_i | \psi(t) \rangle$$

Utilizando a $|\psi(t)\rangle$ obtida no item anterior

$$\begin{aligned} \hat{S}_x |\psi(t)\rangle &= \hat{S}_x \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t} |+\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} |-\rangle \right] \\ &= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t} |-\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} |+\rangle \right], \\ \hat{S}_y |\psi(t)\rangle &= \hat{S}_y \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t} |+\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} |-\rangle \right] \\ &= i \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t} |-\rangle + e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} |+\rangle \right], \\ \hat{S}_z |\psi(t)\rangle &= \hat{S}_z \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t} |+\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} |-\rangle \right] \\ &= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t} |+\rangle + e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} |-\rangle \right]. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 \langle \psi(t) | \hat{S}_x | \psi(t) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} \langle + | - e^{i\frac{\gamma B}{2}t} \langle - | \right] \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t} | - \rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} | + \rangle \right] \\
 &= -\frac{\hbar}{2} \cos(\gamma B t) \\
 \langle \psi(t) | \hat{S}_y | \psi(t) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} \langle + | - e^{i\frac{\gamma B}{2}t} \langle - | \right] i \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t} | - \rangle + e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} | + \rangle \right] \\
 &= \frac{\hbar}{2} \sin(\gamma B t) \\
 \langle \psi(t) | \hat{S}_z | \psi(t) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} \langle + | - e^{i\frac{\gamma B}{2}t} \langle - | \right] \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t} | + \rangle + e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} | - \rangle \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$ \begin{aligned} \langle \hat{S}_x \rangle &= -\frac{\hbar}{2} \cos(\gamma B t) \\ \langle \hat{S}_y \rangle &= \frac{\hbar}{2} \sin(\gamma B t) \\ \langle \hat{S}_z \rangle &= 0 \end{aligned} $

(d) Queremos t tal que

$$\begin{aligned}
 |\psi(0)\rangle &= |\psi(t)\rangle, \\
 \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle - |-\rangle] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{+i\frac{\gamma B}{2}t} |+\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} |-\rangle \right],
 \end{aligned}$$

onde usamos o resultado do item (b). Por inspeção nota-se que a condição a ser satisfeita é

$$e^{\pm i\frac{\gamma B}{2}t} = 1 \Rightarrow \frac{\gamma B}{2}t = 2n\pi \quad (n = 1, 2, \dots).$$

O menor valor de t corresponde a $n = 1$

$ t = \frac{4\pi}{\gamma B}. $

Q9. a) Em qualquer outro referencial S' , o intervalo invariante terá o mesmo valor

$$\Delta s^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2 (\Delta t')^2.$$

Se nesse referencial os eventos ocorressem no mesmo ponto do espaço, $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$ e teríamos $\Delta s^2 = -c^2 (\Delta t')^2 < 0$, o que contradiz o enunciado. Portanto, esse referencial não existe.

b) Como o intervalo invariante é positivo

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 > c^2 \Delta t^2.$$

Supondo a propagação de um sinal com velocidade \vec{V} entre os eventos, teríamos $\Delta x = V_x \Delta t$, $\Delta y = V_y \Delta t$ e $\Delta z = V_z \Delta t$. Levando na desigualdade acima

$$(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) \Delta t^2 > c^2 \Delta t^2.$$

Assim, teríamos $V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = V^2 > c^2$. Portanto, o sinal teria que se propagar com uma velocidade maior do que a da luz, o que é impossível.

c) (i) Como o relógio está em repouso em S' , $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$ e $\Delta s^2 = -c^2 (\Delta t')^2 < 0$. O sinal é negativo.

(ii) Observados no referencial S , os eventos são tais que $\Delta x = V_x \Delta t$, $\Delta y = V_y \Delta t$ e $\Delta z = V_z \Delta t$. Logo,

$$\Delta s^2 = (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) \Delta t^2 - c^2 \Delta t^2 = -c^2 (\Delta t')^2,$$

onde usamos que o valor do intervalo invariante não depende do referencial. Segue que

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \Delta t.$$

d) (i) No referencial de laboratório S , a separação espacial entre os eventos é a distância entre F e D e a separação temporal é o tempo que a partícula leva para viajar entre um e outro

$$\Delta x = L \quad \text{e} \quad \Delta t = \frac{L}{V}.$$

(ii) No referencial da partícula, os eventos ocorrem no mesmo ponto espacial e a separação temporal entre eles pode ser obtida usando o resultado do item (c)(ii)

$$\Delta x' = 0 \quad \text{e} \quad \Delta t' = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(\frac{L}{V} \right).$$

(iii) Do ponto de vista de S' , $L' = V \Delta t'$, pois F e D (e o referencial S) se movem com velocidade $-\vec{V}$. Usando a expressão para $\Delta t'$ obtida no item anterior

$$L' = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} L.$$

Q10. a) A função de partição é obtida somando sobre todos os estados do sistema com o peso de Boltzmann

$$Z = \text{Tre}^{-\beta H} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx dp}{h} \exp \left[-\beta \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \right],$$

onde $\beta^{-1} = k_B T$. Usando

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

obtemos

$$Z = \frac{\pi}{h} \sqrt{\frac{2m}{\beta}} \sqrt{\frac{2}{\beta m \omega^2}}$$

$$\boxed{Z = \frac{2\pi k_B T}{h\omega} = \frac{k_B T}{\hbar\omega}.}$$

b) Como os osciladores são independentes, o número médio $n(x)dx$ pedido é igual a $3N$ vezes a probabilidade de um oscilador ter sua posição no intervalo considerado. Esta probabilidade, por sua vez, é igual ao peso de Boltzmann integrado sobre todos os valores de momento linear, donde

$$n(x)dx = \frac{3Ndx}{Z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{h} \exp \left[-\beta \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \right]$$

$$\boxed{n(x)dx = 3N\omega dx \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp \left(-\frac{m\omega^2 x^2}{2k_B T} \right).}$$

c) A energia potencial média por oscilador é

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= \frac{1}{3N} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) n(x) dx \\ &= \omega \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \exp \left(-\frac{m\omega^2 x^2}{2k_B T} \right) dx \\ &= \omega \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} (k_B T) \sqrt{\frac{2k_B T}{m\omega^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Usando que $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$,

$$\boxed{\langle U \rangle = \frac{k_B T}{2}.}$$

Esse resultado é o esperado pelo teorema da equipartição, que diz que o valor médio clássico de cada grau de liberdade quadrático da Hamiltoniana (como a energia potencial) é $k_B T/2$.

d) Temos que

$$\frac{m\omega^2 x_0^2}{2} = \frac{k_B T}{2} \Rightarrow f = \frac{x_0}{d} = \frac{1}{\omega d} \sqrt{\frac{k_B T}{m}}.$$

Para os dados fornecidos

$$\boxed{f \approx 0.03 = 3\%}.$$