

EUF

**Exame Unificado
das Pós-graduações em Física**

Para o primeiro semestre de 2017

Gabarito

Parte 1

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**

Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q1. (a) Da componente da segunda lei de Newton na direção vertical (orientada para cima), a queda é descrita por

$$F = m \frac{dv}{dt} = -mg - kmv \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -(g + kv) \Rightarrow \int_0^v \frac{dv'}{g + kv'} = - \int_0^t dt', \quad (1)$$

onde usamos a condição inicial de que o corpo parte do repouso. Usando

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln(ax + b),$$

segue que

$$\int_0^v \frac{dv'}{g + kv'} = - \int_0^t dt' \Rightarrow \ln \left(\frac{g + kv}{g} \right) = -kt. \quad (2)$$

Invertendo a última relação

$$v(t) = \frac{g}{k} (e^{-kt} - 1). \quad (3)$$

Como $v(t) < 0$ (corpo em queda), o módulo da velocidade é

$$|v(t)| = -\frac{g}{k} (e^{-kt} - 1) = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}).$$

(b) A velocidade terminal v_{term} é obtida tomando-se o limite $t \rightarrow \infty$ na Eq. (3)

$$v_{term} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g}{k} (e^{-kt} - 1) = -\frac{g}{k} \Rightarrow |v_{term}| = \frac{g}{k}.$$

(c) A posição vertical do corpo é obtida integrando mais uma vez a Eq. (3)

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{g}{k} (e^{-kt} - 1) \Rightarrow \frac{k}{g} \int_0^z dz' = \int_0^t (e^{-kt'} - 1) dt' \Rightarrow \frac{kz}{g} = -\frac{e^{-kt}}{k} + \frac{1}{k} - t,$$

donde

$$z(t) = \frac{g}{k^2} (1 - e^{-kt}) - \frac{gt}{k}. \quad (4)$$

(d) Das Eqs. (3) e (4),

$$z = -\frac{v}{k} - \frac{g}{k}t.$$

Eliminando t usando a Eq. (2), encontramos a expressão procurada

$$z(v) = \frac{g}{k^2} \ln \left(1 + \frac{kv}{g} \right) - \frac{v}{k}.$$

Alternativamente, da Eq. (1)

$$a = \frac{dv}{dt} = -(g + kv).$$

Mas

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{dz} = \frac{a}{v} \Rightarrow v dv = a dz = -(g + kv) dz.$$

Logo

$$- \int_0^v \frac{v'}{g + kv'} dv' = \int_0^z dz' \Rightarrow \frac{g \ln(g + kv) - kv}{k^2} \Big|_0^v = z \Big|_0^z,$$

onde usamos o resultado $\int \frac{x}{a+bx} dx = \frac{bx-a \ln(a+bx)}{b^2}$. Segue que

$$z(v) = \frac{g}{k^2} \ln \left(1 + \frac{kv}{g} \right) - \frac{v}{k}.$$

Q2. (a) Seja um sistema cartesiano de coordenadas com x na horizontal orientada para a direita e y na vertical orientada para baixo e com a origem no ponto de sustentação do pêndulo superior. Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) as coordenadas cartesianas das partículas de massas m_1 e m_2 , respectivamente. Então,

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1, \quad y_1 = l_1 \cos \theta_1, \quad x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2, \quad y_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2.$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1, & \dot{x}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2, \\ \dot{y}_1 &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1, & \dot{y}_2 &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2. \end{aligned}$$

A energia cinética da partícula 1 é

$$T_1 = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{m_1}{2} \left(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 \right) = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2.$$

Para a partícula 2

$$\begin{aligned} \dot{x}_2^2 &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2, \\ \dot{y}_2^2 &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2 \theta_2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2, \end{aligned}$$

donde

$$T_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2} \left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

A energia cinética total é

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} \left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right].$$

(b) A energia potencial é

$$V = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2).$$

(c) A Lagrangiana é $L = T - V$

$$\begin{aligned} L &= \frac{m_1}{2} \left(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2g l_1 \cos \theta_1 \right) \\ &+ \frac{m_2}{2} \left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \right]. \end{aligned}$$

(d) As equações de movimento são as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Temos para $i = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2), \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2), \end{aligned}$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2),$$

e para $i = 2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= -m_2 g l_2 \sin \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2), \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2), \end{aligned}$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

As equações procuradas são, portanto,

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)(l_1^2 \ddot{\theta}_1 + g l_1 \sin \theta_1) + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] &= 0, \\ m_2 [l_2^2 \ddot{\theta}_2 + g l_2 \sin \theta_2] + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] &= 0. \end{aligned}$$

Q3. a) A Hamiltoniana do oscilador isotrópico é

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2 + z^2),$$

que corresponde à soma de 3 osciladores unidimensionais independentes, um para cada direção cartesiana. Como os osciladores são independentes, os auto-estados do sistema são dados pelo produto tensorial (ou Kronecker, ou externo) dos auto-estados de cada oscilador

$$|n_1, n_2, n_3\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes |n_3\rangle,$$

onde $n_i = 0, 1, 2, \dots$ ($i = 1, 2, 3 \equiv x, y, z$) e $|n_i\rangle$ são os auto-estados do oscilador harmônico na direção i . As auto-energias são a soma das auto-energias dos 3 osciladores independentes

$$E_n = \left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega \equiv \left(n + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega,$$

onde definimos $n = n_1 + n_2 + n_3$, que é um número natural arbitrário.

b) $E_n = \frac{7}{2}\hbar\omega$ corresponde a $n = n_1 + n_2 + n_3 = 2$. Esta última equação pode ser satisfeita por $(n_1, n_2, n_3) = (0, 0, 2)$ e suas permutações $(0, 2, 0)$ e $(2, 0, 0)$ e por $(n_1, n_2, n_3) = (0, 1, 1)$ e suas permutações $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$, correspondendo a uma degenerescência total de 6.

c) Os valores possíveis de serem medidos são as auto-energias E_n . A probabilidade de se medir a auto-energia E_n é

$$P_n = \sum_{n_1, n_2, n_3} \delta_{n, n_1 + n_2 + n_3} |\langle n_1, n_2, n_3 | \psi \rangle|^2.$$

Os únicos valores com probabilidade não nula de serem medidos nesse caso são

$$\begin{aligned} \left(0 + 0 + 1 + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega &= \frac{5}{2} \hbar\omega = E_1 \\ \left(0 + 1 + 0 + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega &= \frac{5}{2} \hbar\omega = E_1 \\ \left(0 + 1 + 1 + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega &= \frac{7}{2} \hbar\omega = E_2. \end{aligned}$$

A probabilidade de se medir $E_1 = (5/2)\hbar\omega$ é

$$|\langle 0, 0, 1 | \psi \rangle|^2 + |\langle 0, 1, 0 | \psi \rangle|^2 = 1/2 + 1/4 = 3/4.$$

A probabilidade de se medir $E_2 = (7/2)\hbar\omega$ é

$$|\langle 0, 1, 1 | \psi \rangle|^2 = 1/4.$$

d) O resultado da medida foi E_1 . O estado logo após a medida é a projeção do estado $|\psi\rangle$ no auto-sub-espço de E_1 , ou seja,

$$|\psi(t > 0)\rangle = \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0, 0, 1\rangle + \frac{1}{2} |0, 1, 0\rangle \right),$$

onde α é uma constante de normalização. Normalizando o estado, acha-se $|\alpha|^2(1/2 + 1/4) = 1 \Rightarrow \alpha = 2/\sqrt{3}$. Assim,

$$|\psi(t > 0)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |0, 0, 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |0, 1, 0\rangle.$$

Q4. (a) Fazendo a mudança de variáveis $\nu = xT$, na expressão para a densidade de energia, fornecida no enunciado, obtém-se

$$u(T) = T^4 \int_0^\infty x^3 f(x) dx. \equiv KT^4,$$

onde K é uma constante independente da temperatura. Como u tem dimensão de energia por unidade de volume, segue que K tem dimensão de energia por unidade por unidade de temperatura absoluta à quarta potência ou

$$[K] = \frac{[E]}{l^3 k^4} = \frac{m}{lt^2 k^4},$$

onde m tem dimensão de massa, l tem dimensão de comprimento, t tem dimensão de tempo e k tem dimensão de temperatura absoluta e usamos que $[E] = ml^2/t^2$.

(b)

(i) O fator $\frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu$ é número de modos normais de vibração do campo eletromagnético, por unidade de volume, com frequência no intervalo $[\nu, \nu + d\nu]$.

(ii) Se $h\nu \ll k_B T$, $\exp(h\nu/k_B T) \approx 1 + h\nu/k_B T$ e a distribuição de energia é

$$\frac{h\nu}{e^{(h\nu/k_B T)} - 1} \approx \frac{h\nu}{k_B T} = k_B T.$$

(iii) O resultado obtido no item anterior é o que seria obtido utilizando um tratamento clássico, via o *teorema de equipartição* para osciladores clássicos: $k_B T/2$ para cada termo quadrático na energia, termo cinético e potencial harmônico.

(c) Determinamos primeiramente t_P . Escrevendo, de maneira geral,

$$t_P = G^\alpha h^\beta c^\gamma$$

e levando em conta que

$$[G] = l^3 t^{-2} m^{-1}; \quad [\hbar] = ml^2 t^{-1}; \quad [c] = lt^{-1},$$

obtém-se

$$l^{3\alpha+2\beta+\gamma} m^{-\alpha+\beta} t^{-2\alpha-\beta-\gamma} = t.$$

Logo, $\alpha = \beta = 1/2$ e $\gamma = -5/2$. Portanto,

$$t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}.$$

A distância de Planck é

$$l_P = ct_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}.$$

De maneira similar, para a massa de Planck

$$l^{3\alpha+2\beta+\gamma} m^{-\alpha+\beta} t^{-2\alpha-\beta-\gamma} = m_P,$$

que fornece $\alpha = -\beta = -1/2$ e $\gamma = 1/2$. Logo,

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}.$$

A temperatura de Planck pode ser determinada fazendo a razão entre a energia de Planck, $m_P c^2$, e a constante de Boltzmann

$$T_P = \frac{m_P c^2}{k_B} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}}.$$

Utilizando os valores numéricos das quatro constantes fundamentais, \hbar , c , G e k_B

$$t_P \approx 10^{-44} \text{ s}; \quad l_P \approx 10^{-35} \text{ m}; \quad m_P \approx 10^{-8} \text{ kg}; \quad T_P \approx 10^{32} \text{ K}.$$

Q5. (a) A conservação de energia interna leva a

$$m_x c_x (T_x - T_{eq}) = (K + m_{H_2O} c_{H_2O}) (T_{eq} - T_{amb}) \Rightarrow c_x = \frac{(K + m_{H_2O} c_{H_2O}) (T_{eq} - T_{amb})}{m_x (T_x - T_{eq})}.$$

(b) Usando os dados fornecidos e as fórmulas de propagação de erros do formulário

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{(30,0 + 50,0 \times 1,0)(27,8 \pm 0,1 - 25,0 \pm 0,1)}{200(37,8 - 27,8 \pm 0,1)} \\ &= 0,40 \times \frac{2,8 \pm 0,14}{10,0 \pm 0,1}. \end{aligned}$$

A fração acima é

$$\begin{aligned} \frac{2,8 \pm 0,14}{10,0 \pm 0,1} &= 0,28 \left[1 \pm \sqrt{\left(\frac{0,14}{2,8}\right)^2 + \left(\frac{0,1}{10,0}\right)^2} \right] \\ &= 0,28 \left[1 \pm \sqrt{25 \times 10^{-4} + 10^{-4}} \right] \\ &= 0,28 \left[1 \pm \sqrt{26 \times 10^{-4}} \right] \\ &= 0,28 \left[1 \pm 5,1 \times 10^{-2} \right] \\ &= 0,28 \pm 0,014. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} c_x &= 0,40 \times (0,28 \pm 0,014) \\ c_x &= (0,112 \pm 0,006) \text{ cal/(g}^\circ\text{C)}. \end{aligned}$$

EUF

**Exame Unificado
das Pós-graduações em Física**

Para o primeiro semestre de 2017

Gabarito

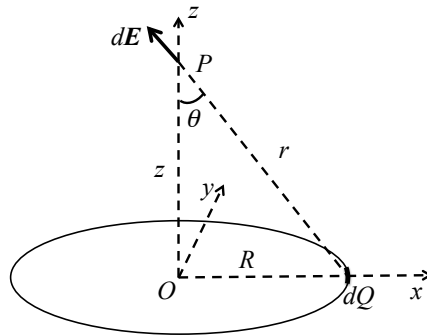
Parte 2

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**

Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q6. a) O elemento de carga dQ do anel produzirá um campo $d\vec{E}$ no ponto P , como mostrado na figura. O módulo deste elemento de campo elétrico é

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$



A componente deste elemento de campo elétrico perpendicular ao eixo z é cancelada pela componente perpendicular ao eixo z produzida pelo elemento de carga situado na posição diametralmente oposta do anel. Ao somar os elementos de campo elétrico devido a todos os elementos de carga do anel, apenas sobrevivem as componentes na direção do eixo z ,

$$dE_z = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{z}{r}.$$

Somando todas as contribuições dos elementos de carga do anel, obtemos

$$\vec{E} = \hat{z} \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \hat{z} \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

b) O potencial elétrico devido ao elemento de carga dQ no ponto P é

$$dV(z) = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

O potencial devido a todas as contribuições dos elementos de carga do anel é obtido somando todas as contribuições, donde se obtém

$$V(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}.$$

c) A energia cinética inicial da partícula é nula, porque ela parte do repouso. A energia potencial elétrica inicial da partícula é nula também, porque $-qV(z_0) \approx 0$ se $z_0 \gg R$. A conservação da energia mecânica (cinética mais potencial elétrica) nos dá a velocidade v no centro do anel via

$$0 + 0 = \frac{mv^2}{2} + (-q)V(0) = \frac{mv^2}{2} - q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

donde

$$v = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 mR}}.$$

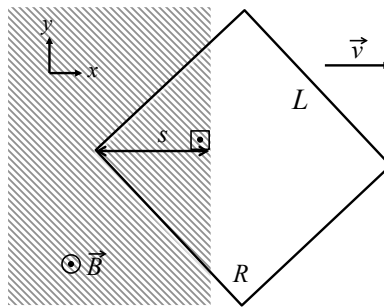
Q7. a) Como o aro é quadrado, a área da região interna ao aro e contida no retângulo sombreado é um triângulo isósceles de altura s e ângulos internos $45^\circ, 90^\circ$ e 45° . Portanto, o tamanho da base do triângulo é $2s$ e sua área é

$$A = \frac{1}{2}s(2s) = s^2.$$

O fluxo do campo magnético através do aro é

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = BA = Bs^2,$$

onde usamos o fato de que o campo magnético é constante na região sombreada e normal ao plano da figura.



b) A força eletromotriz induzida pode ser calculada pela lei de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -B2s\frac{ds}{dt} = -2Bsv,$$

e o valor da corrente elétrica é

$$I = \frac{2Bsv}{R}. \quad (5)$$

A área sombreada diminui com o movimento do aro e, portanto, o fluxo do campo magnético também diminui. O sentido da força eletromotriz, pela lei de Lenz, é anti-horário para se contrapor à diminuição do fluxo de \vec{B} . Segue que a corrente fluirá também no sentido anti-horário.

c) A força magnética sobre um elemento do aro é

$$d\vec{F}_m = Id\vec{l} \times \vec{B}.$$

Os elementos do aro dentro da região sombreada são: $d\vec{l} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x}dl + \hat{y}dl)$ (lado superior esquerdo) e $d\vec{l} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x}dl - \hat{y}dl)$ (lado inferior esquerdo). A força magnética é, então,

$$d\vec{F}_m = I\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x}dl + \hat{y}dl) \times B\hat{z} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x}dl - \hat{y}dl) \times B\hat{z}\right],$$

ou

$$d\vec{F}_m = -\sqrt{2}IBdl\hat{x},$$

e integrando em dl de 0 a $\sqrt{2}s$ (lembrando que as contribuições dos dois segmentos já foram somadas) obtemos

$$\vec{F}_m = -2IBs\hat{x}. \quad (6)$$

Substituindo a Eq. (5) na Eq. (6), obtemos

$$\vec{F}_m = -\hat{x}\frac{4B^2s^2v}{R}.$$

Para que o quadrado se mova com velocidade constante, temos que aplicar uma força de mesmo módulo que \vec{F}_m , mas de sentido oposto, isto é para a direita (sentido positivo de x).

Q8. a) A parte da Hamiltoniana devida ao campo elétrico é

$$\hat{V}_E = (-e)(-E\hat{x}) = eE\hat{x},$$

onde \hat{x} é o operador posição. A Hamiltoniana total é a soma da Hamiltoniana do oscilador harmônico e \hat{V}_E

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} + eE\hat{x}.$$

b) A correção da energia do primeiro estado excitado em ordem linear em E é

$$\Delta E_1^{(1)} = \langle 1 | \hat{V}_E | 1 \rangle = eE \langle 1 | \hat{x} | 1 \rangle.$$

Podemos usar a definição do operador de destruição

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} + i \frac{\hat{p}}{\sqrt{m\hbar\omega}} \right),$$

e obter

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger).$$

Logo, a correção procurada é

$$\Delta E_1^{(1)} = eE \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle 1 | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | 1 \rangle = 0.$$

c) A correção da energia do primeiro estado excitado em ordem quadrática em E é

$$\begin{aligned} \Delta E_1^{(2)} &= \langle 1 | V | \delta\psi_1^{(1)} \rangle \\ &= \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{eE}{\hbar\omega} \right) eE \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle 1 | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | (|0\rangle - \sqrt{2}|2\rangle) \rangle \\ &= \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2} (\langle 1|1\rangle - 2\langle 1|1\rangle) = -\frac{e^2 E^2}{2m\omega^2}. \end{aligned}$$

d) Podemos re-escrever a Hamiltoniana total do sistema como

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \left(\hat{x} + \frac{eE}{m\omega^2} \right)^2 - \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2}.$$

Definindo $\hat{x}' = \hat{x} + eE/(m\omega^2)$ e observando que $[\hat{x}', \hat{p}] = [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, segue que o Hamiltoniano em termos de \hat{x}'

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (\hat{x}')^2 - \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2}$$

corresponde a um oscilador harmônico simples mais uma constante. Portanto, suas autoenergias são

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega - \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2}.$$

Por outro lado, do cálculo perturbativo temos

$$E_1^{(0)} + \Delta E_1^{(1)} + \Delta E_1^{(2)} = \frac{3}{2} \hbar\omega - \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2},$$

que é igual ao resultado exato. Isto indica que as correções de ordem superior são todas nulas.

Q9. (a) Denotemos quantidades no referencial da Terra sem “linha” e no referencial da nave com “linha”. O intervalo de tempo próprio medido pelos astronautas para a viagem de ida é $\Delta t' = 3T/4$ anos. O intervalo de tempo medido na Terra, por outro lado, é $\Delta t = cT/V$, onde V é a velocidade da nave. Da fórmula de dilatação temporal

$$\Delta t' = \gamma(V)\Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{c/V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

donde se obtém que

$$V = \frac{4c}{5}.$$

(b) A distância D' percorrida pela nave em seu próprio referencial corresponde à distância percorrida no referencial da Terra cT contraída pelo fator de Lorentz $\gamma(V = \frac{4c}{5}) = \frac{5}{3}$. Logo, $D' = cT/\gamma = \frac{3cT}{5}$.

(c) Seja $t_1 = t'_1 = 0$ o instante de emissão do primeiro pulso com a nave ainda na posição $x_1 = x'_1 = 0$. O segundo pulso é emitido em $t'_2 = T_0 = 1$ ano, na posição $x_2 = Vt_2$ ($x'_2 = 0$). Esse pulso chegará na Terra em $t_3 = t_2 + x_2/c = T_P$, onde T_P é o período procurado, medido no referencial da Terra. Da fórmula da dilatação temporal, $t_2 = \gamma(V)t'_2 = \frac{5}{3}$ anos. Assim,

$$T_P = t_2 + \frac{x_2}{c} = t_2 \left(1 + \frac{V}{c}\right) = \frac{5}{3} \left(1 + \frac{4}{5}\right) = 3 \text{ anos}.$$

Alternativamente, da expressão do efeito Doppler da luz com $T_0 = 1$ ano

$$T_P = T_0 \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} = 1 \text{ ano} \sqrt{\frac{1 + 4/5}{1 - 4/5}} = 3 \text{ anos}.$$

(d) A velocidade do módulo espacial no referencial da Terra é

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \frac{Vu'_x}{c^2}} = \frac{\frac{-5c}{6} + \frac{4c}{5}}{1 - \frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 6}} = -\frac{c}{10}.$$

Portanto, o tempo da viagem de retorno do módulo é

$$t_R = (cT/2)/|u_x| = \frac{cT}{2} \frac{10}{c} = 5T.$$

Este tempo deve ser somado ao tempo necessário para chegar à metade do caminho antes de ser feito o retorno

$$t_{1/2} = (cT/2)/V = \frac{5T}{8}.$$

Assim, o tempo total procurado é

$$t_{\text{tot}} = t_{1/2} + t_R = 5T + \frac{5T}{8} = \frac{45T}{8}.$$

Q10. (a) Podemos escrever

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(2n + 1 + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega_0 \left(2n + \frac{3}{2} \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A função de partição para o ensemble canônico de um oscilador é

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega_0(2n+\frac{3}{2})} = e^{-\frac{3}{2}\beta\hbar\omega_0} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\beta\hbar\omega_0 n} = e^{-\frac{3}{2}\beta\hbar\omega_0} \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

onde $\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$ e $x = e^{-2\beta\hbar\omega_0}$. Usando $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$,

$$Z_1 = \frac{e^{-\frac{3}{2}\beta\hbar\omega_0}}{1 - e^{-2\beta\hbar\omega_0}}.$$

A função de partição para o sistema de N osciladores é $Z = Z_1^N$. A energia interna por oscilador é

$$\begin{aligned} u &= \frac{U}{N} = -\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_1 = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{3}{2}\beta\hbar\omega_0 + \ln(1 - e^{-2\beta\hbar\omega_0}) \right] \\ &= \frac{3}{2}\hbar\omega_0 + \frac{2\hbar\omega_0 e^{-2\beta\hbar\omega_0}}{1 - e^{-2\beta\hbar\omega_0}} = \hbar\omega_0 \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{e^{2\beta\hbar\omega_0} - 1} \right). \end{aligned}$$

No limite clássico $\hbar\omega_0 \ll k_B T$, $e^{2\beta\hbar\omega_0} \approx 1 + 2\beta\hbar\omega_0$ e

$$u \approx \hbar\omega_0 \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{2\beta\hbar\omega_0} \right) = \frac{3}{2}\hbar\omega_0 + k_B T \approx k_B T.$$

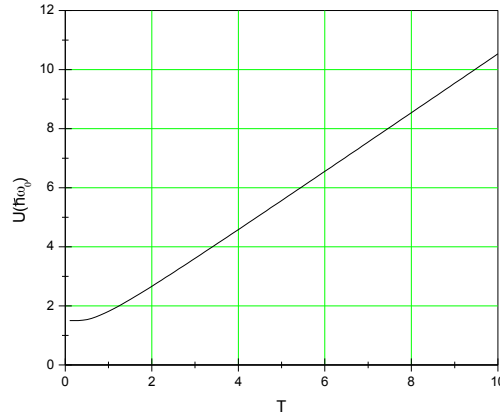


Figura 1: Esboço de u x T .

(b) A entropia por oscilador é

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{S}{N} = \frac{U - F}{NT} = \frac{u}{T} + \frac{k_B \ln Z}{N} = \frac{u}{T} + k_B \ln Z_1 \\
 &= \frac{\hbar\omega_0}{T} \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{e^{2\beta\hbar\omega_0} - 1} \right) - k_B \left[\frac{3}{2}\beta\hbar\omega_0 + \ln(1 - e^{-2\beta\hbar\omega_0}) \right] \\
 &= \frac{2\hbar\omega_0/T}{e^{2\beta\hbar\omega_0} - 1} - k_B \ln(1 - e^{-2\beta\hbar\omega_0}),
 \end{aligned}$$

onde usamos alguns resultados do item (a). No limite clássico

$$s \approx \frac{2\hbar\omega_0/T}{2\beta\hbar\omega_0} - k_B \ln(2\beta\hbar\omega_0) = k_B \left[1 + \ln \left(\frac{k_B T}{2\hbar\omega_0} \right) \right].$$

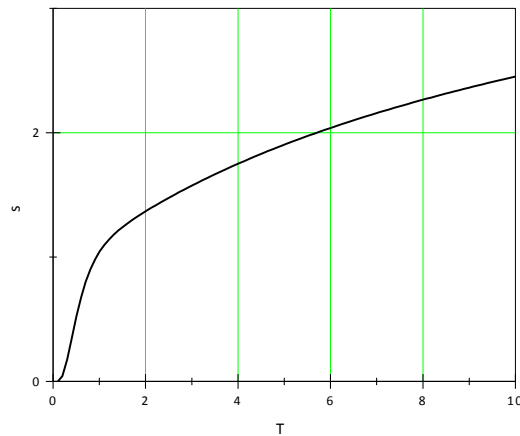


Figura 2: Esboço de s x T .