Exame Unificado das Pós-graduações em Física

EUF

2º Semestre/2011

Parte 1 – 10/05/2011

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx)**.
- Esta prova constitui a **primeira parte** do exame unificado das Pós-graduações em Física.

  Ela contém problemas de: Mecânica Clássica, Física Moderna, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração da prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, Q2, ou ...) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**
  Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE**. As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas serão desconsideradas**.
- **NÃO** escreva nada no formulário; **DEVOLVA-O** ao fim da prova, pois ele será utilizado amanhã.

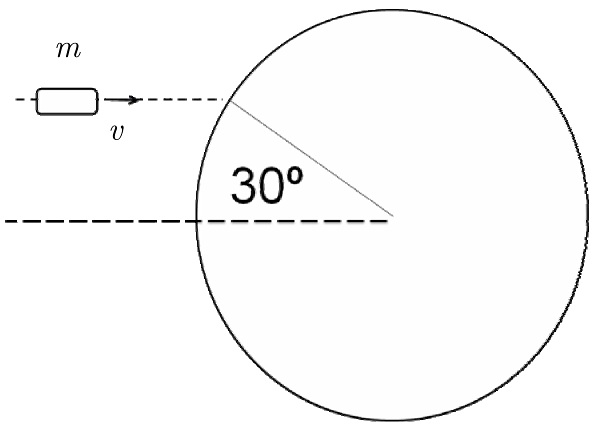
Boa prova!

Q1. Uma bala de massa m é disparada com velocidade v contra um disco homogêneo de massa M e raio R, inicialmente parado, que se encontra deitado sobre uma superfície horizontal lisa sem atrito. Suponha que a bala atinja o disco como indicado na figura e fique retida na superfície do disco. Considere que o centro de massa do sistema (disco + bala) após a colisão coincide com o centro do disco. *Dado:* $I_{disco}^{CM} = \frac{1}{2}MR^2$.

(a) Qual é a velocidade do centro do disco após a colisão?

(b) Qual é a velocidade angular do sistema (disco + bala) após a colisão?

(c) Qual é a variação de energia do sistema devido à colisão?



Q2. Uma partícula de massa m sob a ação da gravidade g constante está vinculada a se mover no interior da superfície de um cone invertido cuja geratriz forma um ângulo α com o eixo do cone. O vértice do cone está na origem e seu eixo ao longo da direção vertical. O atrito pode ser desprezado.

(a) Determine a energia cinética e a energia potencial da partícula. *Sugestão: utilize coordenadas esféricas.*

(b) Escreva a lagrangiana do sistema e obtenha as equações do movimento.

(c) Há grandezas físicas conservadas no movimento dessa partícula? Se há, diga quais são essas grandezas, argumentando sobre como chegou à conclusão de que são conservadas.

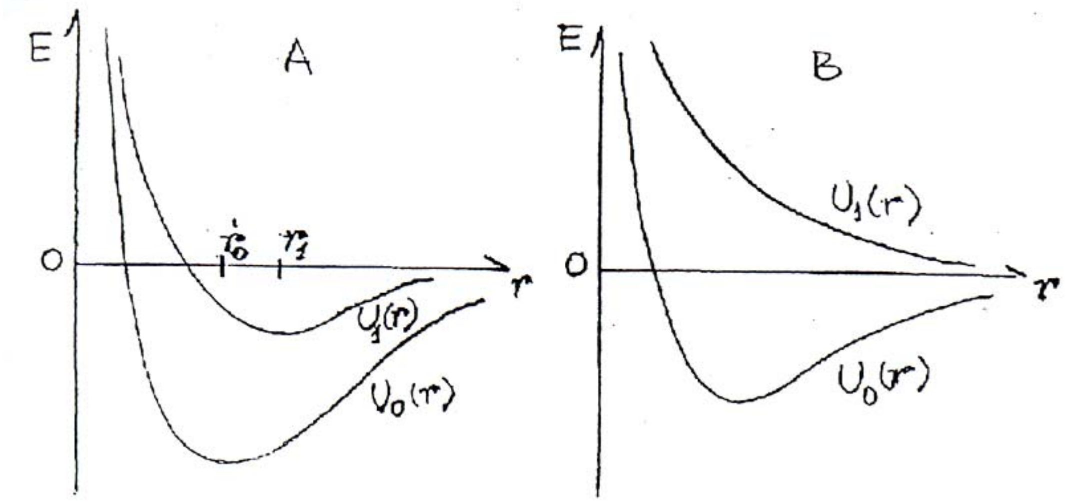
(d) A partir da definição da hamiltoniana, obtenha sua forma explícita em termos das coordenadas e momentos generalizados, e compare-a com a energia mecânica da partícula.

(e) Mostre que a partícula em questão pode executar pequenas oscilações radiais em torno de um raio de equilíbrio r_0 e determine sua frequência. Compare o valor obtido com a frequência de revolução no movimento circular.

Q3. Parte I – A figura abaixo apresenta curvas de energia em função da distância r entre os núcleos para duas moléculas diatômicas denominadas A e B. Em cada um dos gráficos são apresentados dois estados de energia: o estado fundamental, $U_0(r)$, e o primeiro estado eletrônico excitado, $U_1(r)$.

(a) No caso da molécula A, o que significam r_0 e r_1, indicados nos gráficos?

(b) Suponha que a molécula B esteja inicialmente no estado fundamental, mas absorva então um fóton e passe para o primeiro estado eletrônico excitado. O que você espera que aconteça com esta molécula depois disto?



Parte II – A função de onda de um elétron do átomo de hidrogênio no estado 1s é dada por

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi\, a_0^3}} e^{-r/a_0} \ ,$$

onde a_0 é o raio de Bohr e r é a distância do elétron ao núcleo.

(c) Calcule a distância r mais provável de se encontrar um elétron no estado 1s.

(d) Calcule $\langle r \rangle$, o valor médio de r neste estado.

Q4. Uma partícula de massa de repouso m_0, movendo-se inicialmente a uma velocidade $v = \dfrac{4}{5}c$, medida no referencial do laboratório, efetua uma colisão com um corpo idêntico, inicialmente em repouso no mesmo referencial. Como resultado da colisão, as duas partículas combinam-se para formar uma única partícula de massa M. Considere a mecânica relativística.

(a) Quais são o momento linear e a energia total de cada partícula antes da colisão e da partícula composta após a colisão?

(b) Qual é a velocidade da partícula composta após a colisão?

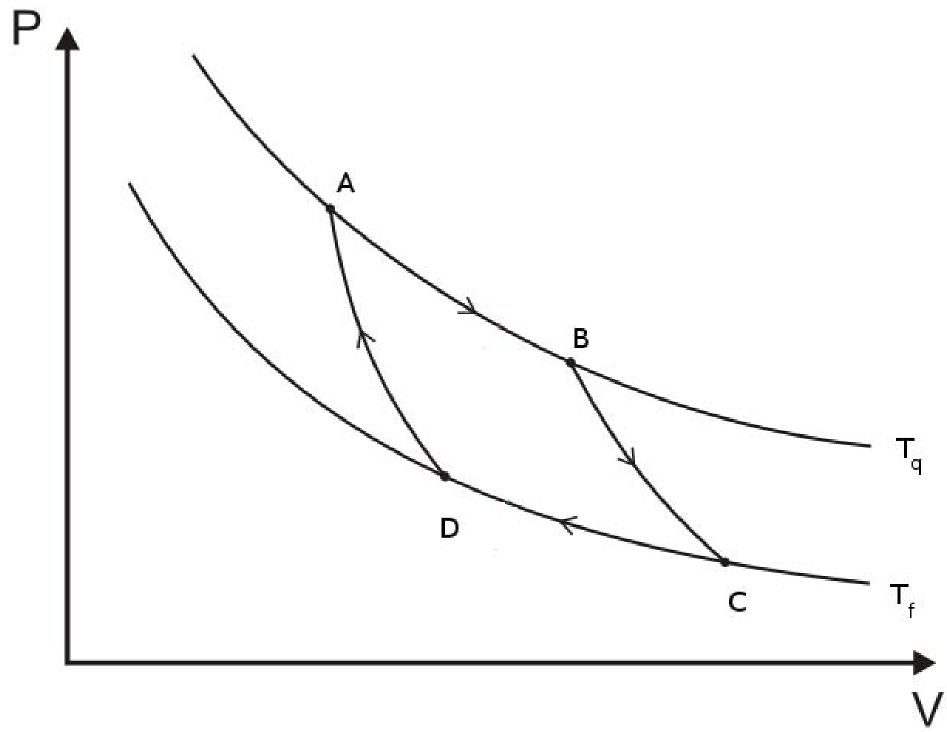
(c) Qual é a massa M da partícula composta?

Q5. Considere n moles de um gás ideal mono-atômico.

(a) Usando a primeira lei da termodinâmica, expresse a entropia do gás como função de T, V, e n.

(b) Um ciclo de Carnot corresponde a: 1) uma expansão isotérmica reversível à temperatura T_q; 2) uma expansão adiabática reversível até a temperatura T_f; 3) uma compressão isotérmica reversível à temperatura T_f; 4) uma compressão adiabática reversível (use a notação da figura). Calcule o trabalho realizado e o calor trocado em cada um dos 4 processos do ciclo de Carnot para n moles de um gás ideal.

(c) Calcule a eficiência do ciclo.



Exame Unificado das Pós-graduações em Física

EUF

2º Semestre/2011

Parte 2 – 11/05/2011

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx)**.
- Esta prova constitui a **segunda parte** do exame unificado das Pós-graduações em Física.

  Ela contém problemas de: Eletromagnetismo, Mecânica Quântica, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração da prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, Q2, ou ...) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**
  Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE**. As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas serão desconsideradas**.
- **NÃO** é necessário devolver o Formulário.

Boa prova!

Q6. Em uma fábrica de chocolate em pó, utiliza-se tubulações com ar comprimido para mover o chocolate em pó entre diferentes setores. Entretanto, com o atrito, o chocolate acaba ficando eletricamente carregado, de tal forma que temos uma densidade volumétrica uniforme de cargas positivas ρ dentro da tubulação de raio R. Suponha que os tubos são condutores e encontram-se aterrados, e que a constante dielétrica do ar não é alterada pelo chocolate em pó.

(a) Calcule o campo elétrico dentro e fora da tubulação, considerando que esta é um cilindro muito longo.

(b) Calcule o potencial elétrico dentro e fora da tubulação. Tome V = 0 na parede do tubo.

(c) Esboce o gráfico do campo elétrico e do potencial em função da distância ao eixo da tubulação.

(d) Se o campo elétrico for maior que um certo valor E_0, podemos ter o rompimento da rigidez dielétrica do ar, resultando numa faísca elétrica. Como o chocolate em pó é muito inflamável, uma faísca no interior da tubulação poderia causar uma explosão. Determine qual condição a tubulação deve satisfazer para evitar este risco.

Q7. Um plasma pode ser pensado como um gás clássico (não relativístico) de íons positivos e elétrons. Estamos interessados inicialmente na interação de uma onda eletromagnética com os elétrons livres deste plasma, já que estes têm massa muito menor do que os íons positivos.

(a) Para uma onda eletromagnética harmônica transversal, seu campo elétrico $\vec{E}$ pode ser expresso na forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}.$$

Mostre que nas operações envolvendo $\vec{\nabla}$ este operador pode ser substituído por $i\vec{k}$, e as derivadas temporais $\frac{\partial}{\partial t}$ por $-i\omega$. Reescreva as equações de Maxwell usando estes fatos.

Considere que a onda harmônica se propaga na direção z e suponha que o número médio de elétrons por unidade de volume do plasma é n.

(b) Mostre que a densidade de corrente induzida pelo campo elétrico da onda é

$$\vec{J} = i\frac{ne^2}{m\omega}\vec{E},$$

onde e e m são, respectivamente, a carga e a massa do elétron, e ω é a frequência da onda. Justifique cuidadosamente suas hipóteses.

(c) Partindo das equações de Maxwell, obtenha a relação de dispersão $\omega(k)$ para a propagação da onda.

(d) O plasma admite a propagação de ondas com quaisquer frequências? Justifique sua resposta.

Q8. Seja a função de onda de uma partícula em uma dimensão, dada por $\Psi(x,t)$. A densidade de probabilidade $\rho(x,t)$ é definida como $\rho(x,t) \equiv \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$. O valor de $\rho(x,t)$ pode mudar no tempo devido ao fluxo de probabilidade saindo ou entrando na região, que se pode expressar como uma equação de continuidade,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} \ ,$$

onde $j(x,t)$ é a densidade de corrente de probabilidade.

(a) Dada a equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \Psi \ ,$$

escreva a derivada temporal de $\rho(x,t)$ em termos de Ψ, Ψ^* e suas derivadas espaciais.

(b) Obtenha a forma explícita de $j(x,t)$.

(c) Ache a equação relacionando a derivada do valor esperado da posição, $\frac{d\langle x \rangle}{dt}$, com o valor esperado do momento, $\langle p \rangle$. *Dica: use integração por partes e assuma que as funções* Ψ *e sua derivada,* $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, *vão ao infinito mais rápido do que* $\frac{1}{x}$.

Q9. Seja o seguinte hamiltoniano representativo de um sistema físico:

$$\hat{H} = \hbar w_0 \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2 \right) \ .$$

Os autoestados deste hamiltoniano são denominados $|n\rangle$, são não-degenerados e satisfazem $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$, onde n é um número inteiro e $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$.

(a) Assuma que os operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ obedecem à relação de comutação $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger \right] = 1$. Mostre que os estados $\hat{a}|n\rangle$ e $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ são autoestados de $\hat{N}$, usando as relações de comutação. Determine os autovalores correspondentes a estes estados, n' e n'', respectivamente.

(b) Dado que todos os estados $|n\rangle$ são não degenerados, determine a constante de proporcionalidade entre os estados $\hat{a}|n\rangle$ e os estados $|n'\rangle$ encontrados no item (a). *Dica*: *lembre que todos os estados são normalizados.* Assuma que o valor esperado do hamiltoniano em qualquer de seus autoestados seja positivo, $\langle H \rangle \geq 0$, e que $\hat{a}|0\rangle = 0$. O que se pode concluir sobre o número de estados $|n\rangle$: ele é finito ou infinito?

(c) Assuma agora que os operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ obedecem à relação de anticomutação $\left\{ \hat{a}, \hat{a}^\dagger \right\} = \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a} = 1$. Mostre que os estados $\hat{a}|n\rangle$ e $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ são autoestados de $\hat{N}$, usando as relações de anticomutação, e determine os autovalores n' e n'' correspondentes a estes estados. Dado que todos os estados $|n\rangle$ são não degenerados, determine a constante de proporcionalidade entre os estados $\hat{a}|n\rangle$ e esses estados $|n'\rangle$. *Dica: lembre que todos os estados são normalizados.*

(d) Assumindo, como no item (c), que os operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ obedecem à relação de anticomutação, que o valor esperado do hamiltoniano em qualquer de seus autoestados seja positivo, $\langle H \rangle \geq 0$, e que $\hat{a}|0\rangle = 0$, isto implica que o número de estados $|n\rangle$ é finito. Quais são estes únicos estados $|n\rangle$ não nulos neste caso?

Q10. A lei de Stefan-Boltzmann diz que a densidade de energia total do campo eletromagnético dentro de uma cavidade em equilíbrio térmico é dada por

$$u(T) = aT^4\,,$$

onde a é uma constante.

(a) Podemos derivar a lei de Stefan-Boltzmann usando argumentos termodinâmicos. Sabendo que, em equilíbrio termodinâmico, a densidade de energia da radiação independe do material que forma as paredes, podemos concluir que qualquer variável extensiva da radiação em uma cavidade deverá ser proporcional ao volume da cavidade e depender apenas da temperatura. Em particular, a energia interna e a entropia da radiação serão $U = u(T)V$ e $S = s(T)V$, respectivamente. Podemos usar o eletromagnetismo clássico para calcular a pressão de radiação nas paredes da cavidade. Ela tem a forma de $P = \frac{u(T)}{3}$. Usando essas informações e a primeira lei da termodinâmica, demonstre a lei de Stefan-Boltzmann.

(b) Agora obtenha esse resultado usando física estatística, assumindo que a radiação eletromagnética é um gás de fótons.

i. Calcule a função de partição, Z, e mostre que o número médio de fótons com energia ϵ_j é

$$\overline{n}_j = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z}{\partial \epsilon_j} = \frac{1}{e^{\beta\epsilon_j} - 1}\,,$$

onde $\beta = \dfrac{1}{k_B T}$.

ii. Obtenha a lei de Stefan-Boltzmann. Você pode usar que o número total de fótons por unidade de volume e frequência entre $[\omega, \omega + d\omega]$ é dado por

$$g(\omega)d\omega = \kappa\frac{\omega^2\, d\omega}{e^{\beta\epsilon_\omega} - 1}\,,$$

onde κ é uma constante e $\epsilon_\omega = \hbar\omega$ é a energia de um fóton.