

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

EUF

para o primeiro semestre de 2014

Parte 1 – 15/10/2013

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada apenas através do código (EUFxxx).
- Esta prova constitui a **primeira parte** do exame unificado das Pós-Graduações em Física. Ela contém problemas de: Eletromagnetismo, Física Moderna e Termodinâmica. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, ou Q2, ou ...) e o seu código de identificação (EUFxxx).** Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. **Não destaque a folha extra.**
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE.** As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- **NÃO** escreva nada no formulário; **DEVOLVA-O** ao fim da prova, pois será utilizado na prova de amanhã.

Boa prova!

Q1. Considere um condutor macroscópico de forma arbitrária, cuja superfície é fechada e suave. Partindo da lei de Gauss e considerando que o rotacional do campo eletrostático é nulo:

- (a) Calcule o campo elétrico no interior do condutor;
- (b) Obtenha a componente normal do campo elétrico na superfície externa do condutor em termos da densidade superficial de carga;
- (c) Obtenha a componente tangencial do campo elétrico na superfície do condutor.

Q2. Considere um conjunto de soluções de ondas planas eletromagnéticas no vácuo, cujos campos (elétrico e magnético) são descritos pela parte real de funções: $\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{A}e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$, onde \vec{k} é o vetor de onda, que determina a direção de propagação da onda, e ω é a frequência angular, que se relaciona com o vetor de onda por $\omega = v/|\vec{k}|$, onde $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ é a velocidade de propagação das ondas.

- (a) Mostre que o divergente de $\vec{u}(\vec{x}, t)$ satisfaz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = ik \cdot \vec{u}$;
- (b) Mostre que o rotacional de $\vec{u}(\vec{x}, t)$ satisfaz: $\vec{\nabla} \times \vec{u} = ik \times \vec{u}$;
- (c) Demonstre que as ondas são transversais e que os vetores \vec{E} , \vec{B} e \vec{k} são mutuamente perpendiculares.

Q3. Em 1913, Niels Bohr introduziu seu modelo atômico através da adaptação do modelo de Rutherford às ideias de quantização propostas na época. Em homenagem a esse evento, aborde os itens abaixo em termos de grandezas fundamentais.

- (a) Use a regra de quantização para o momento angular, $L = \hbar n$, para encontrar uma expressão para os raios das órbitas permitidas de um elétron ao redor de um átomo de número atômico Z .
- (b) Segundo o modelo de Bohr, a transição entre diferentes órbitas é acompanhada pela emissão/absorção de um fôton. Determine a energia do fôton emitido como resultado da transição entre o primeiro estado excitado e o estado fundamental de um átomo de hidrogênio.
- (c) Considere um elétron preso em um poço unidimensional quadrado infinito de largura *a*.
 - a.* Determine uma expressão para os níveis de energia eletrônicos usando a regra de quantização de Bohr-Sommerfeld $\oint pdx = hn$.
 - b.* Determine a largura *a* desse poço, em termos do raio de Bohr, para que a energia de um fôton emitido devido à transição entre o primeiro estado excitado e o estado fundamental seja igual àquela obtida no item (b).
- (d) Determine a energia cinética possível do elétron em recuo nesse espalhamento.

Q4. Os raios- γ produzidos por aniquilação de pares apresentam um espalhamento Compton considerável. Considere que um fôton com energia m_0c^2 seja produzido pela aniquilação de um elétron e um positron, onde m_0 é a massa de repouso do elétron e c é a velocidade da luz. Suponha que esse fôton seja espalhado por um elétron livre e que o ângulo de espalhamento seja θ .

- (a) Encontre a máxima energia cinética possível do elétron em recuo nesse espalhamento.
- (b) Se o ângulo de espalhamento for $\theta = 120^\circ$, determine a energia do fôton e a energia cinética do elétron após o espalhamento.

(c) Se $\theta = 120^\circ$, qual é a direção de movimento do elétron após o espalhamento, em relação à direção do fôton incidente?

Q5. Um mol de um gás ideal simples está contido em um recipiente de volume inicial v_0 e pressão p_0 . O gás ideal é descrito pelas equações $pv = RT$ e $u = cRT$, onde p é a pressão, v é o volume molar, T a temperatura absoluta, u é a energia molar; R e c são constantes. O gás se expande a partir desse estado inicial até o estado correspondente a um volume final $2v_0$ através de um dado processo. Determine o trabalho W realizado pelo gás e o calor Q recebido pelo gás para cada um dos processos listados abaixo. As respostas finais devem ser dadas apenas em termos de (v_0, p_0) e de c .

- (a) Expansão livre. Determine também a variação de temperatura ΔT .
- (b) Expansão quase-estática isentrópica. Obtenha também a pressão final p_f , utilizando o fato de que, nesse processo para um gás ideal, $pv^\gamma = \text{constante}$, onde $\gamma = (c+1)/c$.
- (c) Expansão quase-estática isobárica.
- (d) Expansão quase-estática isotérmica.

Exame Unificado

das Pós-graduações em Física

EUF

para o primeiro semestre 2014

Parte 2 – 16/10/2013

Instruções:

- NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA. Ela deverá ser identificada apenas através do código (EUFxxx).
- Esta prova constitui a **segunda parte** do exame unificado das Pós-Graduações em Física. Ela contém problemas de: Mecânica Clássica, Mecânica Quântica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- NÃO é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, ou Q2, ou ...) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE.** As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- NÃO é necessário devolver o Formulário.

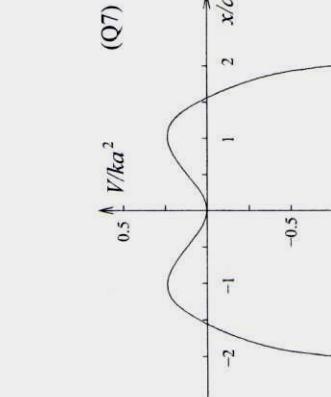
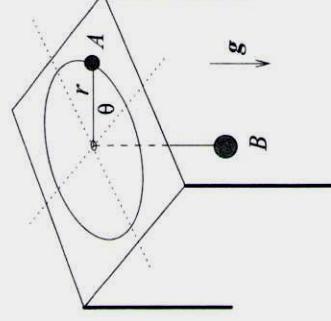
Boa prova!

Q6. Duas partículas, A e B , de massas m e M ($m \neq M$), respectivamente, estão conectadas às extremidades de um fio inextensível de comprimento ℓ e de massa desprezível que passa por um orifício em uma mesa horizontal, como mostrado na figura abaixo. A partícula A move-se sem atrito sobre a mesa enquanto a outra faz verticalmente sob a ação conjunta da gravidade, de aceleração \vec{g} , e da tração do fio (desconsidere também o atrito entre o fio e o orifício).

- (a) Supondo que a posição inicial de A seja $r = r_0$, que velocidade inicial deve ser conferida a ela para que B permaneça em repouso abaixo da superfície da mesa?
- (b) Obtenha as equações do movimento, admitindo que a lagrangiana que descreve um movimento arbitrário desse sistema é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m+M)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\theta^2 - Mg(r-\ell).$$

- (c) Obtenha as grandezas conservadas e dê o significado de cada uma delas.
- (d) Se B for ligeiramente e verticalmente deslocada da sua posição, ocorrerão pequenas oscilações no sistema. Obtenha o período dessas oscilações em termos do raio de equilíbrio r_{eq} e das demais grandezas que caracterizam o sistema (m , M e g).



Q8. Considere o problema de uma partícula de massa m cujo movimento ao longo do eixo- x está restrito ao intervalo $0 \leq x \leq a$, isto é, ela encontra-se confinada em uma caixa com paredes coladas nas posições $x = 0$ e $x = a$.

- (a) Determine a função de onda e a energia do estado fundamental.
- (b) Suponha que a partícula seja descrita pela seguinte função de onda:

$$\psi(x) = A \left[\sin \frac{\pi x}{a} - 3i \sin \frac{2\pi x}{a} \right],$$

- onde A é uma constante de normalização. Determine A e calcule a probabilidade de obter o resultado $2\pi^2\hbar^2/ma^2$ para a medida da energia.
- (c) Suponha agora que a partícula esteja no estado fundamental. Qual é a distribuição de probabilidades do momento da partícula nesse estado?
 - (d) Considerando novamente que a partícula esteja no estado fundamental, suponha que as paredes sejam removidas, de forma instantânea, deixando a partícula livre ($\mathcal{H} = \hat{p}^2/2m$). Qual é a energia dessa partícula livre?

Q9. Considere uma partícula de spin 1/2, cujo momento magnético é $\vec{M} = \gamma \vec{S}$, onde γ é uma constante. Obtenha o estado quântico dessa partícula utilizando o espaço gerado pelos autovetores $|+\rangle$ e $|-\rangle$ do operador \hat{S}_z , que mede a projeção do spin na direção z ,

$$\hat{S}_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle, \quad \hat{S}_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle.$$

A partícula encontra-se sujeita a um campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{y}$, orientado ao longo do eixo y , de forma que que o hamiltoniano é dado por

$$\mathcal{H} = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -\gamma B \hat{S}_y.$$

- Inicialmente, no instante $t = 0$, ela está no estado $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$.
- (a) Quais são as possíveis valores da projeção do spin no eixo- y ?
 - (b) Encontre os autovetores de \hat{S}_y .
 - (c) Obtenha $|\psi(t)\rangle$ para $t > 0$ em termos de $|+\rangle$ e $|-\rangle$ definidos acima.
 - (d) Obtenha os valores médios dos observáveis S_x , S_y e S_z em função do tempo.

Q10. Um determinado material magnético é composto por N átomos magnéticos não-interagentes, cujos momentos magnéticos $\boldsymbol{\mu}$ podem apontar em três direções possíveis, conforme mostra a figura ao lado: $\boldsymbol{\mu}_0 = \mu\hat{y}$, $\boldsymbol{\mu}_1 = \mu\hat{x}$ e $\boldsymbol{\mu}_2 = -\mu\hat{x}$. O sistema encontra-se em equilíbrio térmico a temperatura T e na presença de um campo magnético uniforme orientado ao longo da direção y , $\mathbf{H} = H\hat{y}$, de modo que os níveis de energia correspondentes a um único átomo são $\epsilon_0 = -\mu H$, $\epsilon_1 = 0$ e $\epsilon_2 = 0$.

- (a) Obtenha a função de partição canônica Z de um átomo, a função de partição canônica Z do sistema e a energia livre de Helmholtz f por átomo.
- (b) Determine a energia média $u = \langle \epsilon_n \rangle$ e a entropia s por átomo.
- (c) Obtenha a magnetização por átomo $\mathbf{m} = m_x\hat{x} + m_y\hat{y} + m_z\hat{z} = \langle \boldsymbol{\mu}_n \rangle$.
- (d) Verifique que a susceptibilidade isotérmica $\chi_T = (\partial m_y / \partial H)_T$ a campo nulo obedece à lei de Curie, $\chi_T \propto 1/T$.

Coordenadas cartesianas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{e}}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{e}}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas cilíndricas

15-16/10/2013

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{e}}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z \quad \nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\varphi)}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{e}}_r$$

$$+ \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right] \hat{\mathbf{e}}_\theta + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Exame Unificado

das Pós-graduações em Física

EUF

para o primeiro semestre de 2014

Não escreva nada neste formulário. Devolva-o ao fim do primeiro dia de prova.

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\vec{s} = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot dV \quad \oint \mathbf{A} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

Teoremas do Cálculo Vetorial

Termodinâmica e Mecânica Estatística

Mecânica Clássica

$$dU = dQ - dW \quad dU = TdS - pdV + \mu dN$$

$$F = U - TS \quad G = F + pV$$

$$H = U + pV \quad \Phi = F - \mu N$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \quad C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p$$

$$\text{Gás Ideal: } \quad pV = nRT \quad U = CT \quad pV^\gamma = \text{constante}$$

Transformada de Legendre: $\phi(p) = \min_x \{f(x) - xp\}$

$$S = k_B \ln \Omega \quad \text{sendo } \Omega \text{ o número de estados acessíveis.}$$

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} \quad Z = \int_n d\gamma e^{-\beta E(\gamma)}$$

$$F = -k_B T \ln Z \quad U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

$$\Xi = \sum_N Z_N e^{\beta \mu N}$$

$$f_{\text{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2 a^2} F(1/u), \quad u = \frac{1}{r}; \quad \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 = \frac{2m}{L^2} [E - V(1/u)]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad L = T - V \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^N F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \quad Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 r}{dt^2} \right)_{\text{rotação}} &= \left(\frac{d^2 r}{dt^2} \right)_{\text{fixo}} - 2\omega \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \\ H &= \sum_{k=1}^J p_k \dot{q}_k - L; \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

Constantes físicas

Velocidade da luz no vácuo	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s} = 4,14 \times 10^{-15} \text{ eV s}$
Constante de Wien	$hc = 1240 \text{ eV nm}$
Permeabilidade magnética do vácuo	$W = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m K}$
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 = 12,6 \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$
Permissividade elétrica do vácuo	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
Permissividade elétrica do vácuo	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$
Constante gravitacional	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$
Carga elementar	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Massa do elétron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} = 511 \text{ keV/c}^2$
Comprimento de onda Compton	$\lambda_C = 2,43 \times 10^{-12} \text{ m}$
Massa do próton	$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg} = 938 \text{ MeV/c}^2$
Massa do neutrônio	$m_n = 1,675 \times 10^{-27} \text{ kg} = 940 \text{ MeV/c}^2$
Massa do deuteron	$m_d = 3,344 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1,876 \text{ MeV/c}^2$
Massa da partícula α	$m_\alpha = 6,645 \times 10^{-27} \text{ kg} = 3,727 \text{ MeV/c}^2$
Constante de Rydberg	$R_H h c = 13,6 \text{ eV}$
Raio de Bohr	$R_H = 1,10 \times 10^7 \text{ m}^{-1}, \quad R_H h c = 13,6 \text{ eV}$
Constante de Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$
Constante universal dos gases	$R = 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Raio do Sol	$= 6,96 \times 10^8 \text{ m}$
Raio da Terra	$= 6,37 \times 10^6 \text{ m}$
Distância Sol-Terra	$= 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$
1 J = 10^7 erg	1 eV = $1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$
$\pi \approx 3,142$	$\ln 2 \cong 0,693$
$e \approx 2,718$	$\ln 3 \cong 1,099$
$1/e \approx 0,368$	$\ln 5 \cong 1,609$
$\log_{10} e \approx 0,434$	$\ln 10 \cong 2,303$

Resultados matemáticos úteis:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1,3,5,\dots(2n+1)}{(2n+1)2^n \alpha^n} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{du}{u(u-1)} = \ln(1-1/u)$$

$$\int \frac{dz}{(a^2+z^2)^{1/2}} = \ln\left(z+\sqrt{z^2+a^2}\right)$$

$$\ln N! \approx N \ln N - N$$

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$

$$\int \frac{1}{a^2+y^2} dy = \frac{1}{a} \arctan \frac{y}{a}$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2+x^2)$$

$$\int_0^\infty \frac{z^{x-1}}{e^z + 1} dz = (1 - 2^{1-x}) \Gamma(x) \zeta(x) \quad (\text{para } x > 0)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx = \pi \delta_{m,n}$$

$$\int_0^L e^{iBx} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{n\pi L [1 - (-1)^n e^{iBL}]}{L(n^2\pi^2 - B^2L^2)} \quad (\text{para } n = 1,2,3,\dots)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1-x^2)^2} \cos^2 \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$dV = \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$$

$$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad Y_{2,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,\pm 2} = \mp \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

Solução geral para a Eq. de Laplace em coordenadas esféricas, com simetria azimutal:

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}) P_l(\cos \theta)$$

Eletromagnetismo

Mecânica Quântica

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell} + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= Q = \int \rho dV & \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \oint \mathbf{H} \cdot d\vec{\ell} - \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} & \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{J} \end{aligned}$$

$$(\rho = 0, \mathbf{J} = 0) \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H}$$

$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -Q_P \quad \nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_P \quad \oint \mathbf{M} \cdot d\vec{\ell} = I_M \quad \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_M$$

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r \quad dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r} \quad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad d\mathbf{F} = I d\vec{\ell} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} dV}{r}$$

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$t' = \gamma(t - Vx/c^2) \quad E = \hbar\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

Relatividade

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & v'_z &= \frac{v_z}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)} & \lambda' - \lambda &= \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos \theta) & n\lambda &= 2d \sin \theta \\ v'_x &= \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2} & v'_y &= \frac{v_y}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)} & E &= \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2} & \Delta x \Delta p &\geq \hbar/2 \\ E = mc^2 &= \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + K & E &= \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2} & L &= mv r = n\hbar & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\dot{L}^2}{2mr^2} + V(r) \\ \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ p_x &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \\ \hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_\pm &= L_x \pm iL_y & L_\pm Y_{lm}(\theta, \varphi) &= \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_{lm \pm 1}(\theta, \varphi) \\ L_z &= x p_y - y p_x & L_z &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad [L_x, L_y] = i\hbar L_z \\ E_n^{(1)} &= \langle n | \delta H | n \rangle & E_n^{(2)} &= \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | \delta H | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}, \quad \phi_n^{(1)} = \sum_{m \neq n} \frac{\langle m | \delta H | n \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \phi_m^{(0)} \\ \hat{\mathbf{S}} &= \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} & \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \bar{\psi}(\vec{p}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3 r e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r}/\hbar} \psi(\vec{r}) & \psi(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3 p e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}/\hbar} \bar{\psi}(\vec{p}) \end{aligned}$$

Física Moderna

$$\begin{aligned} E &= \hbar\nu = \frac{hc}{\lambda} & R_T &= \sigma T^4 & \lambda_{\max} T &= b & L &= mv r = n\hbar \\ E_n &= -Z^2 \frac{hcR_H}{n^2} & & & & & & \end{aligned}$$