EUF

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2014

23 abril 2014

Parte 1

Instruções

- **Não escreva seu nome na prova.**
Ela deverá ser identificada apenas através do código (**EUFxxx**).
- Esta prova contém problemas de:
eletromagnetismo, física moderna e termodinâmica.
Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**.
O tempo mínimo de permanência na sala é de 60 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **Resolva cada questão na página correspondente do caderno de respostas.**
As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- Não escreva nada no formulário.
Devolva-o ao fim da prova, pois será utilizado na prova de amanhã.

Boa prova!

Q1. Um capacitor esférico é composto por uma esfera condutora de raio R_1, concêntrica com uma casca condutora esférica de raio R_2 e espessura desprezível, com $R_1 < R_2$. O condutor interno possui carga $+Q$ e o externo possui carga $-Q$.

(a) Calcule o campo elétrico e a densidade de energia em função de r, onde r é a distância radial a partir do centro dos condutores, para qualquer r.

(b) Determine a capacitância C do capacitor.

(c) Calcule a energia do campo elétrico armazenada em uma casca esférica de raio r, espessura dr e volume $4\pi r^2 dr$, localizada entre os condutores. Integre a expressão obtida para encontrar a energia total armazenada entre os condutores. Dê sua resposta em termos da carga Q e da capacitância C.

Q2. Duas bobinas idênticas, compostas cada uma por um anel de raio R e espessura desprezível, são montadas com seus eixos coincidentes com o eixo-z, conforme se vê na figura abaixo. Seus centros estão separados por uma distância d, com o ponto médio P coincidindo com a origem do eixo-z. Cada bobina transporta uma corrente elétrica total de intensidade I. Ambas as correntes têm o mesmo sentido anti-horário.

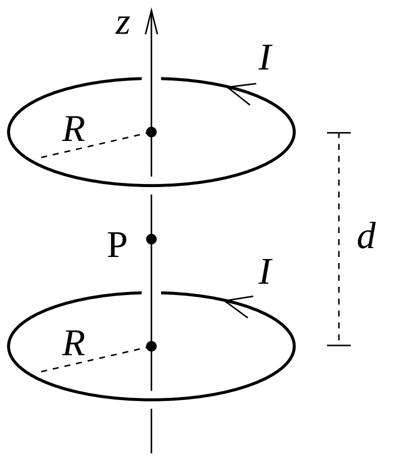
(a) Utilize a lei de Biot-Savart para determinar o campo magnético de uma única bobina ao longo de seu eixo de simetria.

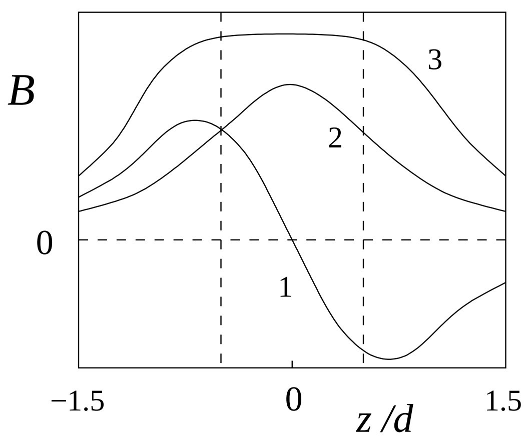
(b) A partir do resultado anterior, obtenha o campo magnético $B(z)$ ao longo do eixo-z das duas bobinas.

(c) Admitindo que o espaçamento d seja igual ao raio R das bobinas, mostre que, no ponto P, as seguintes igualdades são válidas: $dB/dz = 0$ e $d^2B/dz^2 = 0$.

(d) Considerando os gráficos abaixo, de B (em unidades arbitrárias) versus z, qual curva descreve o campo magnético ao longo do eixo-z na configuração do item (b)? Justifique.

(e) Supondo que a corrente na bobina superior tenha seu sentido invertido, calcule o novo valor do campo magnético no ponto P.





Q3. A lei de radiação de Planck permite obter a seguinte densidade de energia do espectro de corpo negro de uma cavidade à temperatura T:

$$\rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

(a) Expresse a densidade de energia em função do comprimento de onda $\lambda = c/\nu$ no lugar da frequência ν.

(b) Mostre que para comprimentos de onda longos e altas temperaturas, o resultado anterior se reduz à lei clássica de Rayleigh-Jeans.

(c) Obtenha a lei de Stefan-Boltzmann a partir da lei de radiação de Planck. Note que a radiância $R(\lambda)$, que é o fluxo de energia por unidade de área em uma pequena abertura da cavidade, é dada por $R(\lambda) = c\rho(\lambda)/4$.

Q4. Considere uma colisão relativística frontal completamente inelástica de duas partículas que se movem ao longo do eixo-x. Ambas as partículas possuem massa m. Antes da colisão, um observador A, em um referencial inercial, nota que elas se movem com velocidades constantes de mesma magnitude mas em direção opostas, isto é, a partícula 1 se move com velocidade v e a partícula 2 se move com velocidade $-v$. De acordo com outro observador B, entretanto, a partícula 1 está em repouso antes da colisão.

(a) Determine a velocidade v'_x da partícula 2 medida pelo observador B antes da colisão.

(b) Ache as velocidades v_A e v'_B da partícula resultante após a colisão, medidas, respectivamente, pelos observadores A e B.

(c) Utilize a conservação relativística massa-energia para calcular a massa M da partícula resultante após a colisão.

Q5. A pressão p de um gás se comporta, como função da temperatura T e do volume molar v, de acordo com a seguinte equação de estado

$$p = \frac{RT}{v} - \frac{a}{v^2},$$

onde a é uma constante positiva e R é a constante universal dos gases.

(a) Utilize a identidade

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p$$

para determinar a energia molar u como função de v.

(b) Admitindo que $c_v = (\partial u/\partial T)_v$ seja constante e igual a c, ache u como função de T e v.

(c) Numa expansão livre do gás, a temperatura cresce ou decresce? Leve em conta que numa expansão livre u permanece invariante e v cresce.

(d) Demonstre a identidade do item (a).

EUF

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2014

24 abril 2014

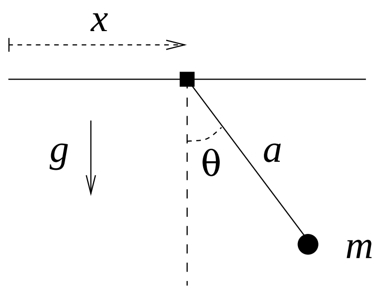
Parte 2

Instruções

- **Não escreva seu nome na prova.**
  Ela deverá ser identificada apenas através do código (**EUFxxx**).
- Esta prova contém problemas de:
  mecânica clássica, mecânica quântica e mecânica estatística.
  Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**.
  O tempo mínimo de permanência na sala é de 60 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **Resolva cada questão na página correspondente do caderno de respostas.**
  As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- Não é necessário devolver o formulário.

Boa prova!

Q6. Um pêndulo simples é constituído por uma partícula de massa m suspensa por um fio inextensível de comprimento a e massa desprezível. Seu ponto de suspensão é conectado a um suporte que se movimenta horizontalmente sem atrito como mostrado na figura. Suponha que o suporte seja muito pequeno e que o pêndulo se movimente apenas no plano vertical. Usando como coordenadas generalizadas x e θ, onde x é a posição horizontal do suporte e θ o deslocamento angular do pêndulo, conforme se vê na figura, o movimento do sistema é descrito pela lagrangiana:



$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}(a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + mga\cos\theta.$$

(a) Obtenha a equação de movimento para a coordenada θ.

(b) Admitindo que os deslocamentos angulares sejam pequenos e que o suporte esteja sujeito a um movimento harmônico forçado de frequência ω, isto é, descrito por $x(t) = x_0 \cos\omega t$, obtenha a solução geral $\theta(t)$ da equação do movimento para a coordenada θ.

(c) No caso do item anterior, obtenha a frequência de ressonância ω_R.

(d) Escreva a solução geral para $\theta(t)$, quando as condições iniciais forem $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = 0$ e o suporte movimentar-se com frequência $\omega < \omega_R$.

Q7. Um átomo de trítio pode ser descrito *classicamente* como um núcleo com carga elétrica $+e$, composto por um próton e dois nêutrons, circundado por um elétron orbital de carga $-e$, o qual percorre uma órbita circular de raio r_0. Em um processo conhecido como decaimento beta, o núcleo de trítio se transforma em um núcleo de hélio, composto por dois prótons e um nêutron, emitindo um par de partículas que rapidamente escapa do sistema atômico. Como consequência desse processo, o átomo de hélio fica ionizado uma vez, e o elétron orbital passa subitamente para uma nova situação, orbitando agora em torno de um núcleo de carga $+2e$.

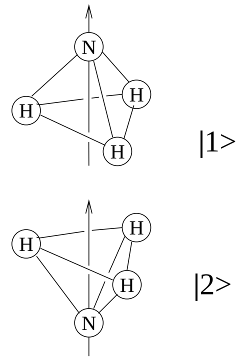
(a) Supondo que o par de partículas que escapa do átomo tenha momento linear total de módulo p, obtenha a velocidade de recuo do átomo de hélio de massa M.

(b) Obtenha a energia E_a do elétron orbital antes do decaimento beta.

(c) Calcule a energia E_d do elétron orbital depois do decaimento beta e obtenha a razão $\rho = E_a/E_d$.

(d) Determine o momento angular total do elétron em função de r_0 e da massa m do elétron. Calcule a maior e a menor distância entre o elétron e o núcleo na nova órbita em termos de r_0.

Q8. Considere os dois estados $|1\rangle$ e $|2\rangle$ da molécula de amônia ilustrados ao lado. Suponha que eles estão ortonormalizados, $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ e que apenas esses dois estados sejam acessíveis ao sistema, de forma que podemos descrevê-lo usando a base formada por $|1\rangle$ e $|2\rangle$. Nessa base, o hamiltoniano H do sistema é dado por



$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -E_1 \\ -E_1 & E_0 \end{pmatrix}$$

(a) Se inicialmente o sistema estiver no estado $|1\rangle$, ele permanecerá no estado $|1\rangle$ em um instante posterior? E se estiver no estado $|2\rangle$, ele permanecerá no estado $|2\rangle$?

(b) Ache os autovalores E_I e E_{II} e os respectivos autovetores $|I\rangle$ e $|II\rangle$ de H, expressando-os em termos de $|1\rangle$ e $|2\rangle$.

(c) Baseado no resultado acima, podemos prever pelo menos uma frequência de emissão de radiação eletromagnética possível para uma molécula de amônia. Qual é essa frequência?

(d) Ache a probabilidade de medirmos uma energia E_I no seguinte estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle - \frac{2}{\sqrt{5}}|2\rangle.$$

Q9. Uma partícula quântica de massa m está sujeita a um potencial

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2).$$

(a) Obtenha os níveis de energia dessa partícula. Isto é, determine os autovalores de

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi.$$

(b) Considere o estado fundamental e os dois primeiros níveis excitados. Monte uma tabela mostrando para cada um desses três níveis, o valor da energia, a degenerescência e os respectivos estados em termos dos números quânticos.

(c) Utilizando

$$\nabla^2\psi = \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2}\psi\right]$$

e lembrado que $L^2 Y_{\ell m} = \hbar^2\ell(\ell+1)Y_{\ell m}$, escreva a equação diferencial do item (a) para a parte radial da função de onda (não é preciso resolvê-la). Identifique nessa equação o potencial efetivo $V_{\text{ef}}(r)$.

(d) Resolva a equação diferencial do item anterior para o caso em que $\ell = 0$ e determine o autovalor correspondente. Para isso, admita uma solução do tipo $e^{-\alpha r^2}$ e determine α.

Q10. Considere um gás monoatômico clássico constituído por N átomos não interagentes de massa m confinados num recipiente de volume V, à temperatura T. A hamiltoniana corespondente a um átomo é dada por $\mathcal{H} = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m$.

(a) Mostre que a função de partição canônica atômica é $\zeta = V/\lambda^3$, onde $\lambda = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ é o comprimento de onda térmico de de Broglie.

(b) Utilizando ζ do item anterior, obtenha a função de partição Z do sistema e a energia livre de Helmholtz F. Obtenha, também, a energia livre por átomo $f = F/N$ no limite termodinâmico $N \to \infty$, $V \to \infty$, $v = V/N$ fixo.

(c) Obtenha a energia interna U e a pressão p do gás.

(d) Calcule a entropia por átomo no limite termodinâmico.