

Aula-6

Teoria da Relatividade Restrita - II

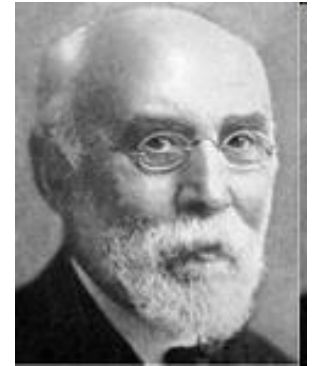
Física Geral F-428



As transformações de Lorentz

- Se, no referencial S , dois eventos estão separados por uma diferença de coordenada $\Delta x = x_2 - x_1$; e ocorrem em dois instantes de tempo separados por $\Delta t = t_2 - t_1$, no referencial S' teremos:

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t) \quad \Delta t' = \gamma (\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x)$$



H. A. Lorentz
(1853 – 1928)

- Vemos que as noções de espaço e tempo, como entes independentes, não têm mais sentido; o que temos é um ente único: o **espaço-tempo**.

- Podemos também inverter as transformações acima:

$$\Delta x = \gamma (\Delta x' + v \Delta t') \quad \Delta t = \gamma (\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x')$$

A relatividade das velocidades

Vimos que: $\Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t)$

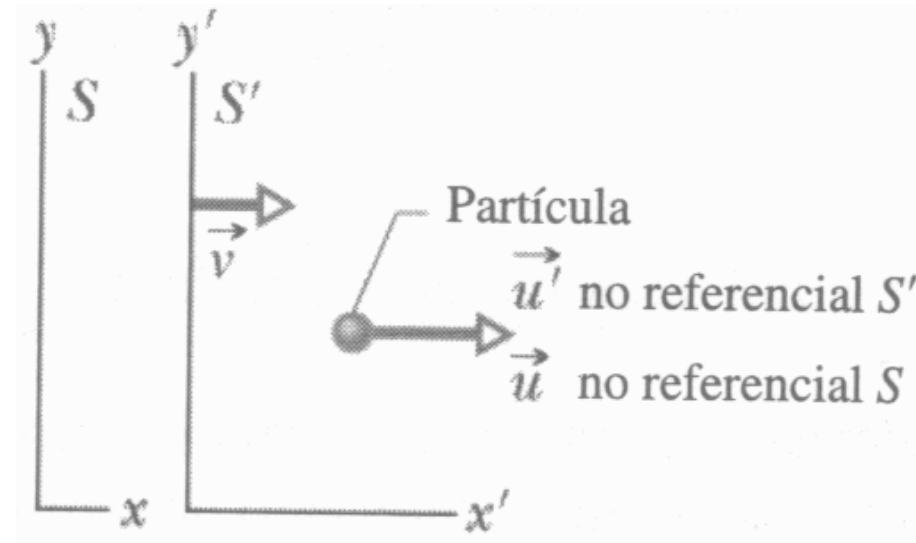
$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right)$$

Portanto: $dx' = \gamma (dx - v dt)$

$$dt' = \gamma \left(dt - \frac{v}{c^2} dx \right)$$

Logo:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$



Na transformação clássica
de Galileu teríamos ($v \ll c$) :

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = u_x - v$$

A relatividade das velocidades

Podemos ainda deduzir expressões para as relações entre as demais componentes nos outros eixos:

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{\sqrt{(1-\beta^2)} u_y}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{\sqrt{(1-\beta^2)} u_z}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

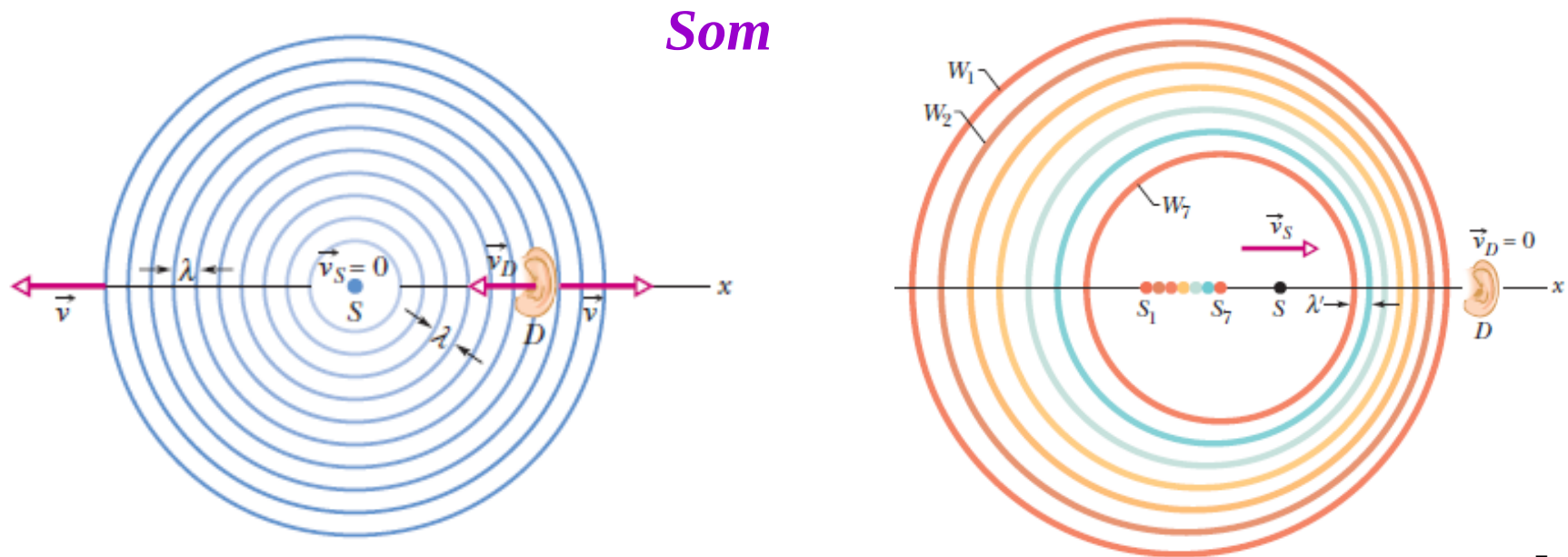
- As transformações podem ser invertidas, trocando os índices com linha $\leftrightarrow$ sem linha e v por $-v$:

- Se: $u'_x = c$ teremos: $u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}} = c$

➤ Portanto, a transformação está coerente com o fato da **velocidade da luz ser a mesma** em todos os referenciais, e **nenhuma velocidade poder excedê-la**.

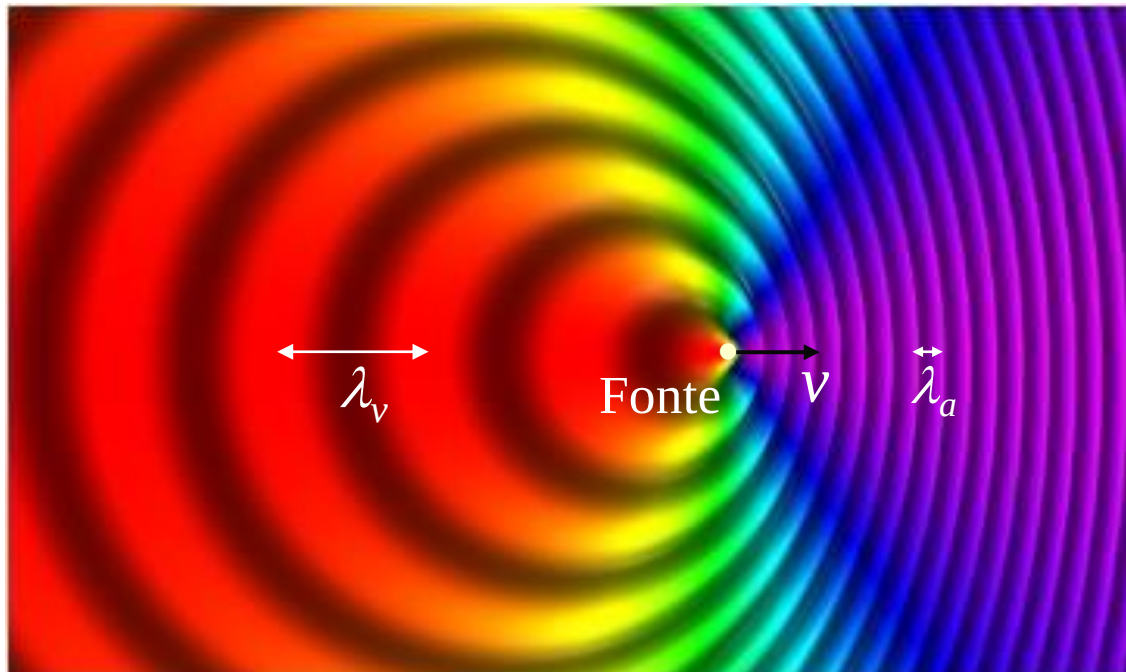
O efeito Doppler da luz

- No efeito Doppler do som é necessário distinguir as situações em que ele é causado pelo **movimento da fonte ou do detector**. Isto, porque o **som se propaga no ar**, e ambos, fonte e detector, podem ter velocidades relativas a esse. Já para a luz, que **se propaga no vácuo**, importa apenas a **velocidade relativa** entre a **fonte e o detector**.



O efeito Doppler da luz

- No efeito Doppler do som é necessário distinguir as situações em que ele é causado pelo **movimento da fonte ou do detector**. Isto ocorre porque o **som se propaga no ar**, e ambos, fonte e detector, podem ter velocidades relativas a esse. Já para a luz, que **se propaga no vácuo**, importa apenas a **velocidade relativa** entre a **fonte e o detector**.

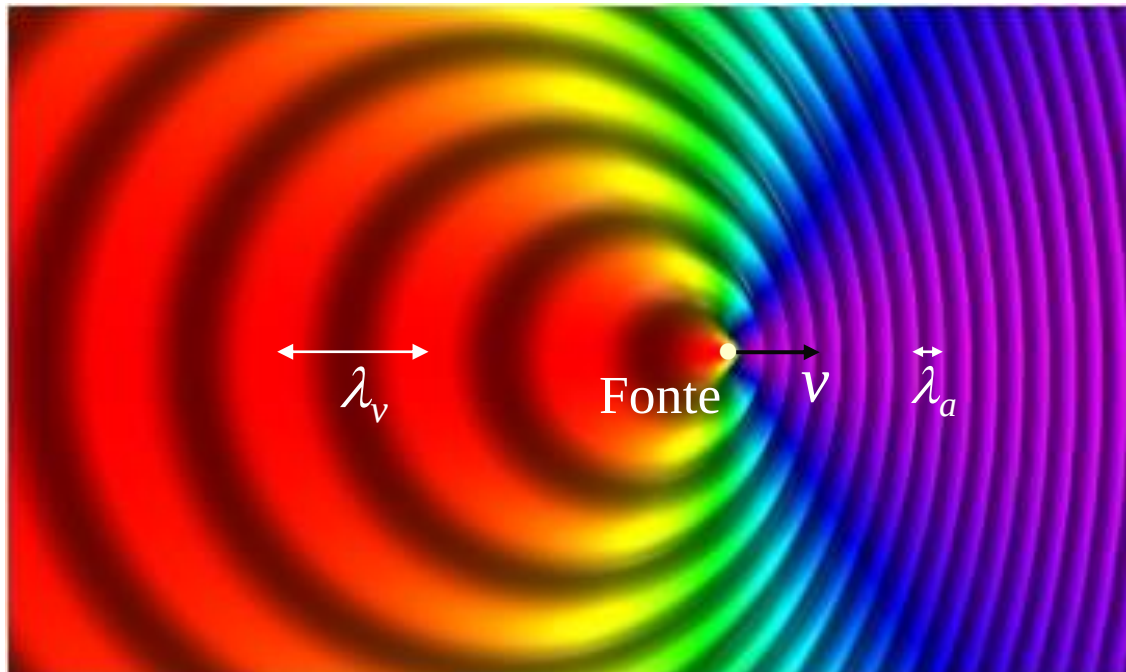


Detector

O efeito Doppler da luz

- No efeito Doppler do som é necessário distinguir as situações em que ele é causado pelo **movimento da fonte ou do detector**. Isto ocorre porque o **som se propaga no ar**, e ambos, fonte e detector, podem ter velocidades relativas a esse. Já para a luz, que **se propaga no vácuo**, importa apenas a **velocidade relativa** entre a **fonte e o detector**.


Detector



O efeito Doppler da luz

Se o observador O , em S , descreve o campo $E(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t)$ de uma onda eletromagnética, o observador O' , em S' , deverá observar $E'(x', t') = E'_0 \sin(k'x' - \omega't')$. Pelo princípio da relatividade, devemos ter invariância de fase:

$$kx - \omega t = k'x' - \omega't'$$

Então, usando que: $x = \gamma(x' + vt')$ e $t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x')$

podemos mostrar que:

$$k' = \gamma \left(k - \frac{v\omega}{c^2} \right)$$

e

$$\omega' = \gamma (\omega - vk)$$

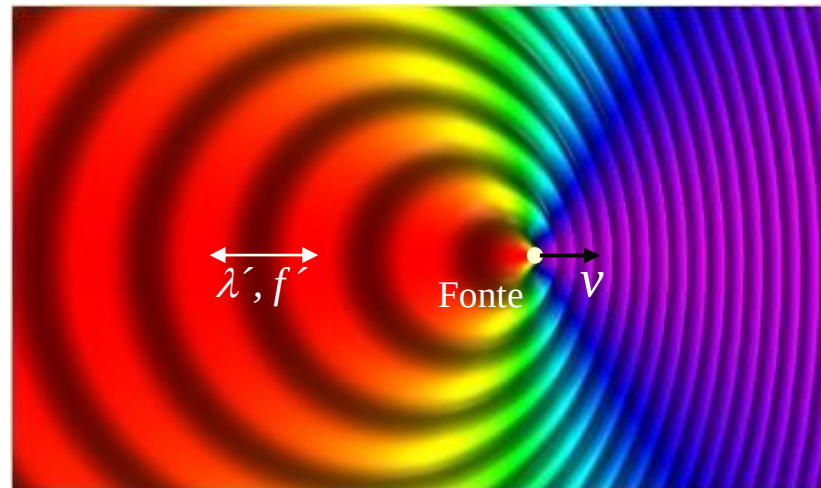
O efeito Doppler da luz

Mas: $c = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega'}{k'} ; \quad f = \frac{c}{\lambda}$

$$k' = \gamma k (1 - \beta) \quad \text{e} \quad \omega' = \gamma \omega (1 - \beta) \quad ; \quad \beta = \frac{v}{c}$$



$$f' = f \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

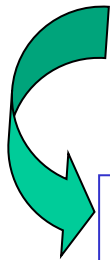


Esta expressão é válida no caso do observador ($f' = f_{obs}$) e a fonte ($f = f_0$) estarem se *afastando* ($\beta > 0$).

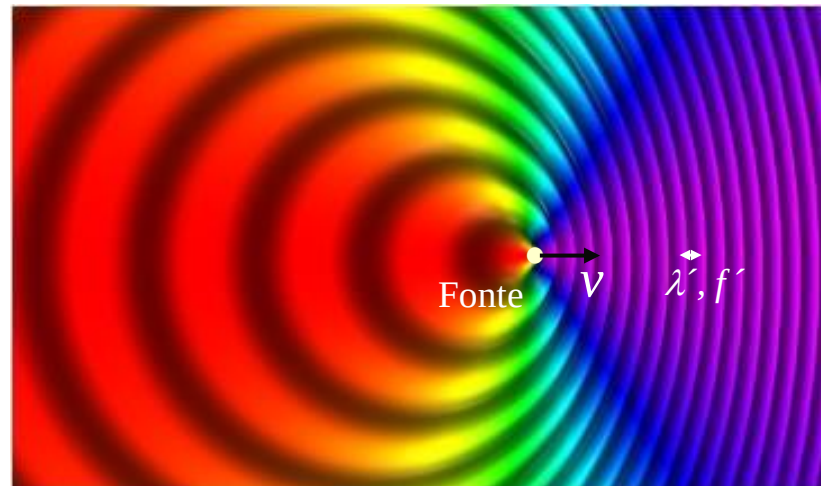
O efeito Doppler da luz

Mas: $c = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega'}{k'} ; \quad f = \frac{c}{\lambda}$

$$k' = \gamma k (1 - \beta) \quad \text{e} \quad \omega' = \gamma \omega (1 - \beta) \quad ; \quad \beta = \frac{v}{c}$$



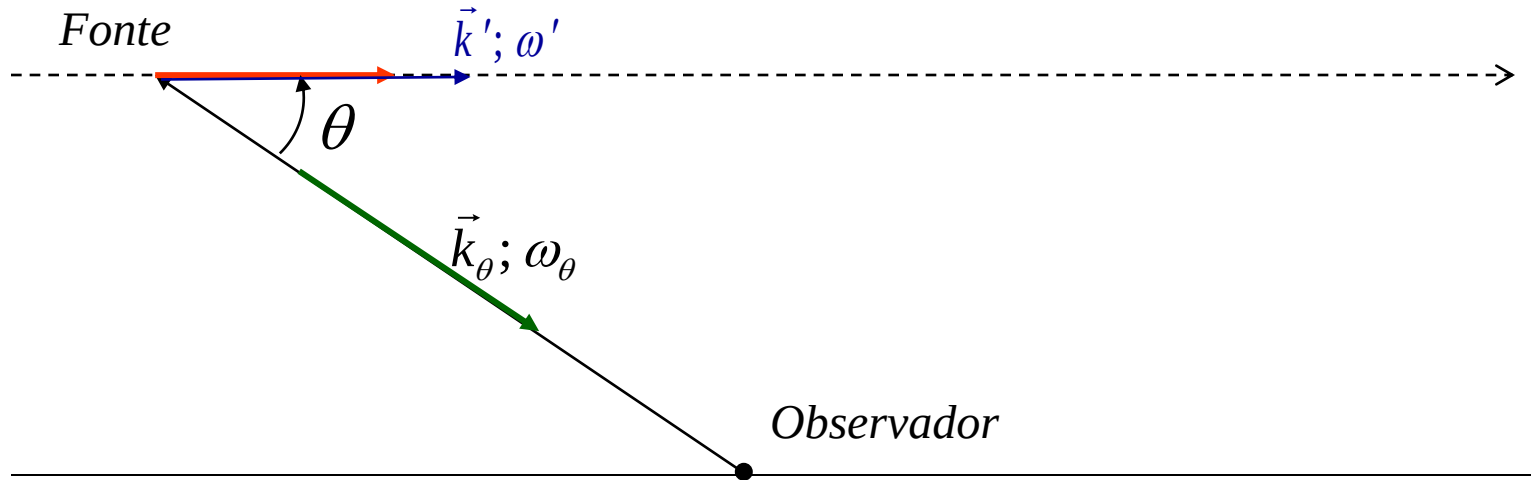
$$f' = f \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$



Esta expressão é válida no caso do observador ($f' = f_{obs}$) e a fonte ($f = f_0$) estarem se *aproximando* ($\beta < 0$).

O efeito Doppler da luz

Caso o movimento relativo não seja na direção de propagação:



$$\omega' = \gamma \omega_\theta (1 - \beta \cos \theta)$$

Se $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ “*Doppler transverso*”. Note que aqui a fonte em movimento emite radiação com frequência conhecida $\omega' = \omega_0$.

$$\rightarrow \omega_{90^\circ} = \omega_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

O efeito Doppler na Astronomia

- Vamos supor que uma estrela se **afasta** da Terra com uma velocidade relativamente pequena, $\beta \ll 1$. Neste caso temos:

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = f_0 \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \simeq f_0 (1 - \beta)$$

Em termos dos comprimentos de onda, temos:

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0} \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

$$v = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} c = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} c$$

- Se a estrela estiver **se afastando**
($v > 0$) temos $\lambda > \lambda_0$



**Deslocamento da luz
para o vermelho**

- Se a estrela estiver **se aproximando**
($v < 0$) teremos $\lambda < \lambda_0$



**Deslocamento da
luz para o azul**

Observações experimentais e suas implicações para a Cosmologia:

Em 1929, **Edwin Hubble** propôs que o desvio para o vermelho observado para as linhas espectrais originadas de átomos de cálcio de galáxias distantes era devido ao efeito Doppler: as galáxias estariam **se afastando** de nós.

É possível medir a velocidade de recessão V de várias galáxias e Hubble encontrou $V = H_0 r$, com H_0 é a constante de Hubble = 71 ± 4 km/s/Mpc.

**Esta é a primeira evidência experimental
da expansão do Universo!**

Dinâmica relativística

Na **Mecânica Newtoniana** temos

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \text{ onde o momento linear é definido por: } \vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{const.}$$

Procuramos um **análogo relativístico** desta expressão que tenha as seguintes propriedades:

- a) O **momento relativístico** deve ser **conservado em sistemas isolados**, assim como na Mecânica Newtoniana.
- b) A expressão obtida deve se reduzir à forma newtoniana no limite $v/c \rightarrow 0$.

Dinâmica relativística

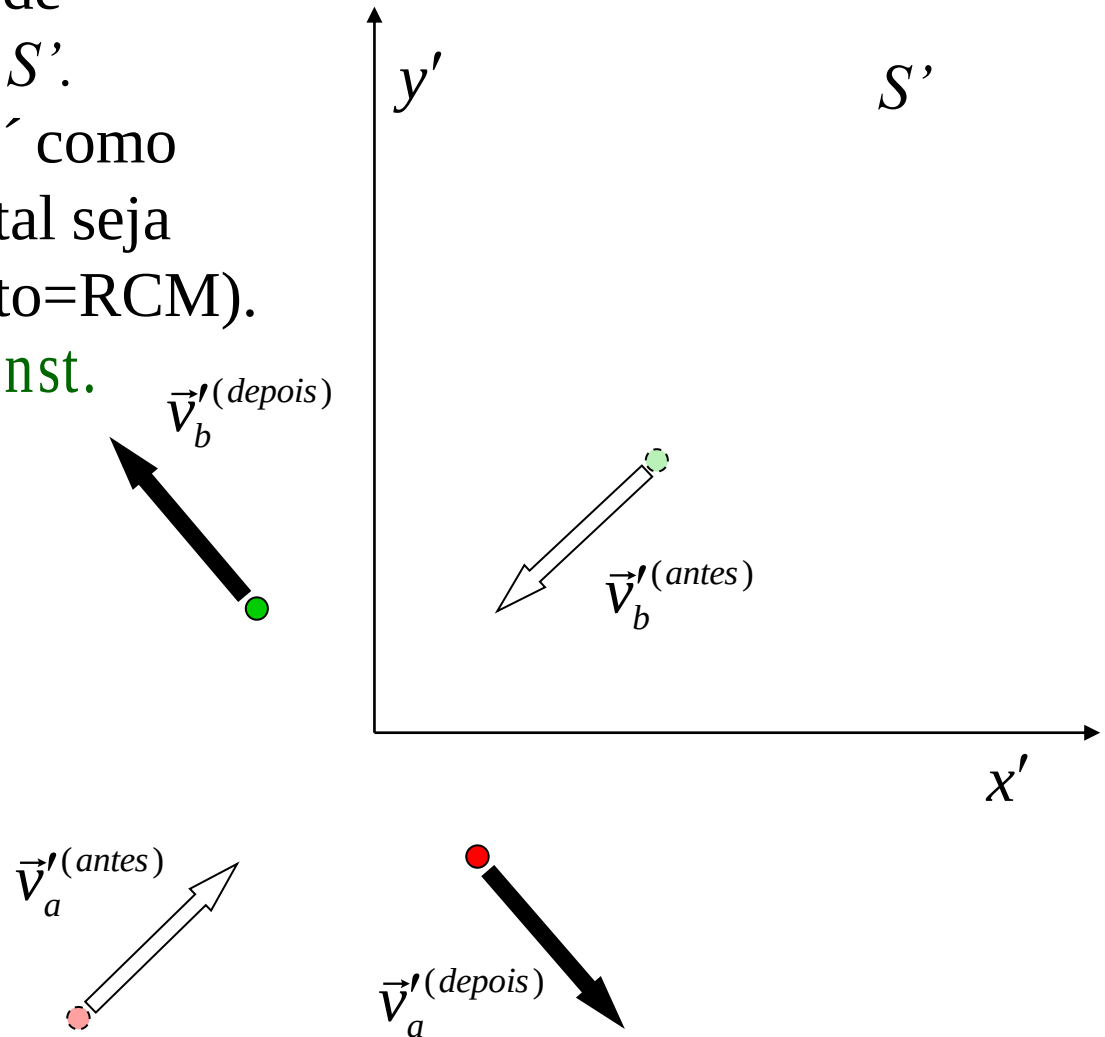
Colisão das partículas a e b , de **mesma massa**, no referencial S' .

Vamos definir o referencial S' como aquele em que o momento total seja nulo (Ref. Centro de Momento=RCM).

Se $\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const.}$

$$m\vec{v}'_{(antes)}_a + m\vec{v}'_{(antes)}_b =$$

$$m\vec{v}'_{(depois)}_a + m\vec{v}'_{(depois)}_b$$



Momento linear relativístico

Usando a fórmula para a **transformação de Lorentz das velocidades**:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{(1 - \beta^2)} u'_z}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

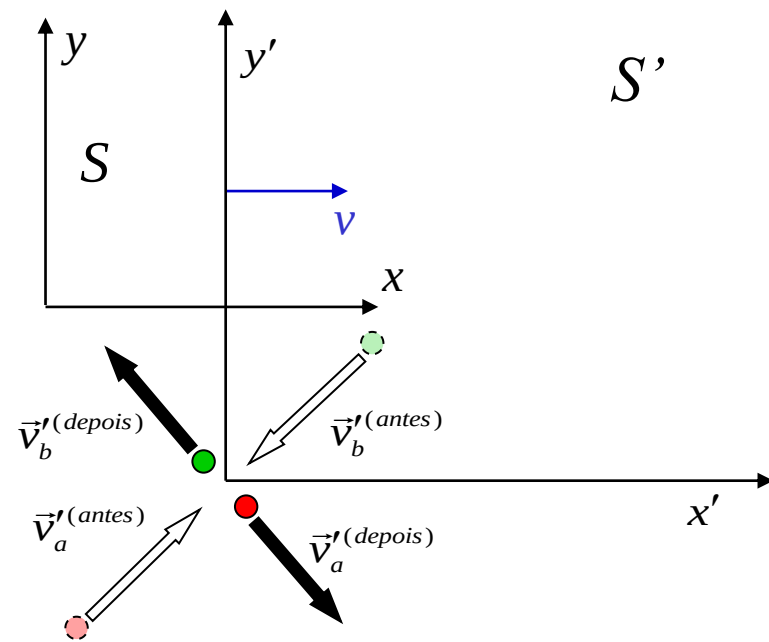
$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{(1 - \beta^2)} u'_y}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

... podemos escrever as componentes das velocidades no referencial S , que se move em relação a S' com velocidade constante, $-v$, ao longo do eixo x ...

Momento linear relativístico

$$\begin{aligned} v'_{ax} &= v'_x & v'_{bx} &= -v'_x \\ v'_{ay} &= v'_y & v'_{by} &= -v'_y \\ v'_{ax} &= v'_x & v'_{bx} &= -v'_x \\ v'_{ay} &= -v'_y & v'_{by} &= v'_y \end{aligned}$$

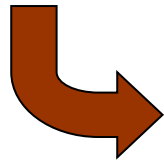
$$m_a = m_b = m$$



transformação
de Lorentz das
velocidades

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v v'_x}{c^2}}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} v'_y}{1 + \frac{v v'_x}{c^2}}$$



$$v_{ax}^{antes} = \frac{v'_x + v}{1 + (v'_x v / c^2)}$$

$$v_{ax}^{depois} = \frac{v'_x + v}{1 + (v'_x v / c^2)}$$

$$v_{ay}^{antes} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} v'_y}{1 + (v'_x v / c^2)}$$

$$v_{ay}^{depois} = \frac{-\sqrt{1 - \beta^2} v'_y}{1 + (v'_x v / c^2)}$$

$$v_{bx}^{antes} = \frac{-v'_x + v}{1 - (v'_x v / c^2)}$$

$$v_{bx}^{depois} = \frac{-v'_x + v}{1 - (v'_x v / c^2)}$$

$$v_{by}^{antes} = \frac{-\sqrt{1 - \beta^2} v'_y}{1 - (v'_x v / c^2)}$$

$$v_{by}^{depois} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} v'_y}{1 - (v'_x v / c^2)}$$

Momento linear relativístico

$$mv_{a,x}^{antes} + mv_{b,x}^{antes} = mv_{a,x}^{depois} + mv_{b,x}^{depois}$$

$$mv_{a,y}^{antes} + mv_{b,y}^{antes} \neq mv_{a,y}^{depois} + mv_{b,y}^{depois}$$



➤ $\vec{p} = m\vec{v}$ **não** fornece uma expressão tal que o momento linear total conservado na colisão.

Momento linear relativístico

Mas, pode-se mostrar que o momento total será uma quantidade conservada se definirmos:

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

(com m_0 sendo a **massa do corpo** no referencial em que o corpo se encontra em **repouso**.)

- Pode-se ainda definir uma **massa relativística**, dada por:

$$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

- A força é, então, dada por:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (m_0 \gamma \vec{v})$$

Energia relativística (Supondo $E_{\text{potencial}} = 0$)

- A taxa de variação temporal da energia cinética de uma partícula continua sendo dada por:

$$\frac{dK}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$$

$$K = \int_0^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\vec{r}} \frac{d(m_0 \gamma \vec{v})}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\vec{r}} \frac{d(m_0 \gamma \vec{v})}{dt} \cdot \vec{v} dt$$

$$x = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$K = m_0 c^2 \int_0^{\vec{v}} d\left(\frac{\vec{v}/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \cdot (\vec{v}/c) = m_0 c^2 \int_0^{\vec{v}} \frac{x dx}{(1 + x^2)^{1/2}} = m_0 c^2 \left[(x^2 + 1)^{1/2} \right]_0^{\vec{v}}$$

$$\Rightarrow K = (\gamma - 1) m_0 c^2 = (m - m_0) c^2 \quad \text{onde:} \quad m = \gamma m_0$$

então: $K + m_0 c^2 = m c^2 = E \Rightarrow \boxed{\boxed{E = m c^2}}$ Energia Total

Veja uma outra forma de deduzir essas expressões
da energia total e da energia cinética
(através de derivada, não de integral)
no arquivo “**Dinâmica Relativística**”.

Energia relativística

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Relação energia-momento linear

Usando que $\vec{p} = m\vec{v}$ temos $\vec{p} = \frac{mc^2\vec{v}}{c^2} \Rightarrow \vec{v} = \frac{c^2\vec{p}}{E}$

Como $E^2 = m^2c^4 = \gamma^2 m_0^2 c^4$ obtemos:

$$E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{\left(1 - \frac{c^4 p^2}{c^2 E^2}\right)} \longrightarrow E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

$$\text{Se } m_0 = 0 \longrightarrow E = pc$$

- Portanto, a radiação eletromagnética transporta um momento linear $\Delta p = \Delta U / c$, e podemos imaginá-la como composta por corpúsculos de massa zero (*fótons*), como veremos mais adiante.

Energia relativística

- Limite clássico da energia

Expandindo $E=mc^2$ para $v/c \ll 1$:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} + \dots \right)$$



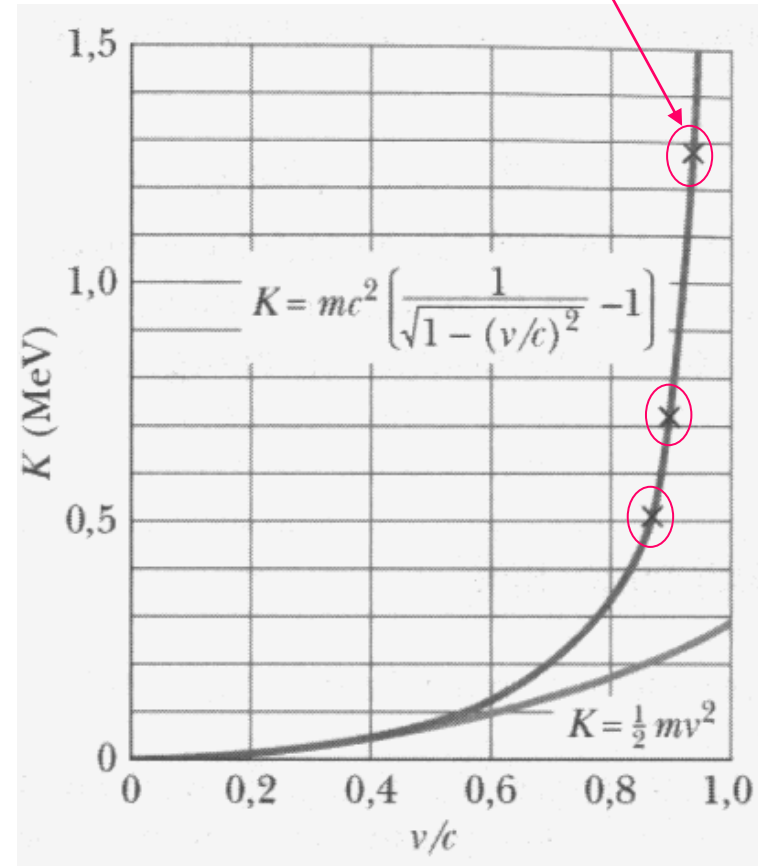
$$E = m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} + \frac{3m_0 v^2}{8} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) + \dots$$

Energia de repouso: $E = m_0 c^2$

Energia cinética para $v/c \ll 1$:

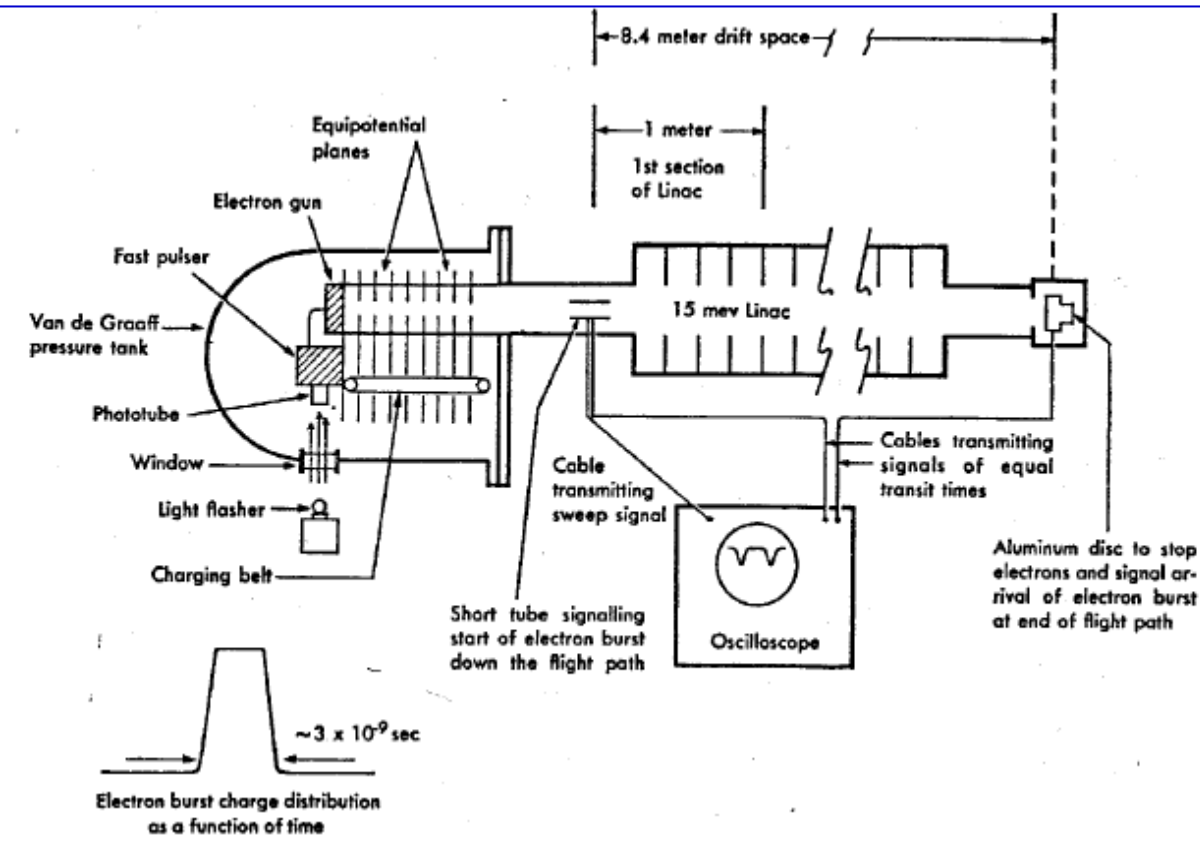
$$K \approx \frac{m_0 v^2}{2}$$

pontos experimentais (x)

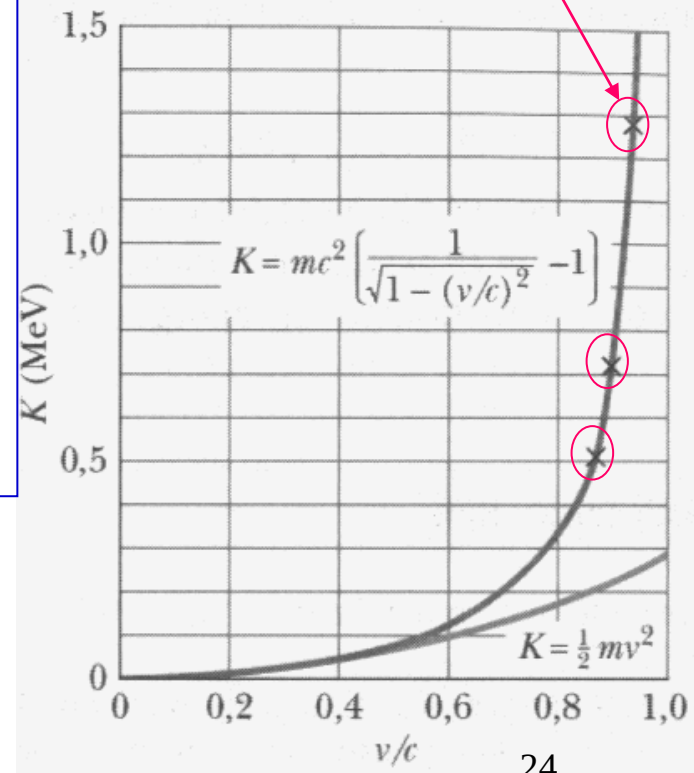


Energia relativística

Experimento de William Bertozzi para medir v e K de elétrons relativísticos no acelerador linear no MIT (Amer.Jour.Phys. 32(1964)551)



pontos experimentais (x)



Energia de repouso: $E = m_0 c^2$

Energia cinética para $v/c \ll 1$: $K \approx \frac{m_0 v^2}{2}$

Procedimento mais usual: usar apenas a **massa de repouso** da partícula nas nossas equações, que é a única massa definida para a partícula. As equações da dinâmica ficarão:

$$\mathbf{p} = |\vec{\mathbf{p}}| = \gamma m \mathbf{v}$$

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

$$E = \gamma m c^2 = m c^2 + E_{cin}$$

$$E_{cin} = E - m c^2 = (\gamma - 1) m c^2$$

Energia relativística

- A **energia** de um **sistema isolado** se mantém **constante**.

- Portanto, se um sistema **libera uma quantidade de energia** $\Delta E = E_f - E_i = -Q$, deve apresentar uma redução de massa:

$$\Delta E = (\Delta m) c^2 = -Q$$



$$\Delta m = m_f - m_i = -\frac{Q}{c^2}$$

Isto vale tanto para reações químicas quanto para reações nucleares, embora a variação de massa no primeiro caso seja imperceptível.

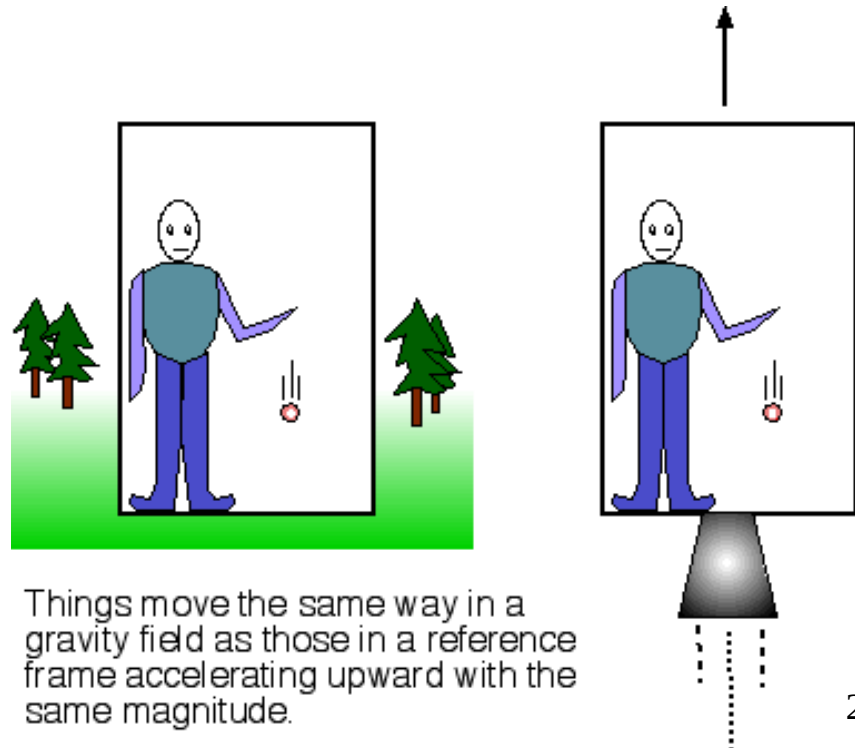
- Se a **energia** de um sistema **aumenta**, (ex.: aumentando a sua velocidade), sua massa também aumenta:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$$

Relatividade Geral

- Movimento retilíneo uniforme em um referencial inercial parece acelerado, se visto de um referencial não-inercial.
- Einstein encarou a **força gravitacional** como uma **força de inércia**:
É impossível distinguir a física num campo gravitacional constante daquela num referencial uniformemente acelerado!

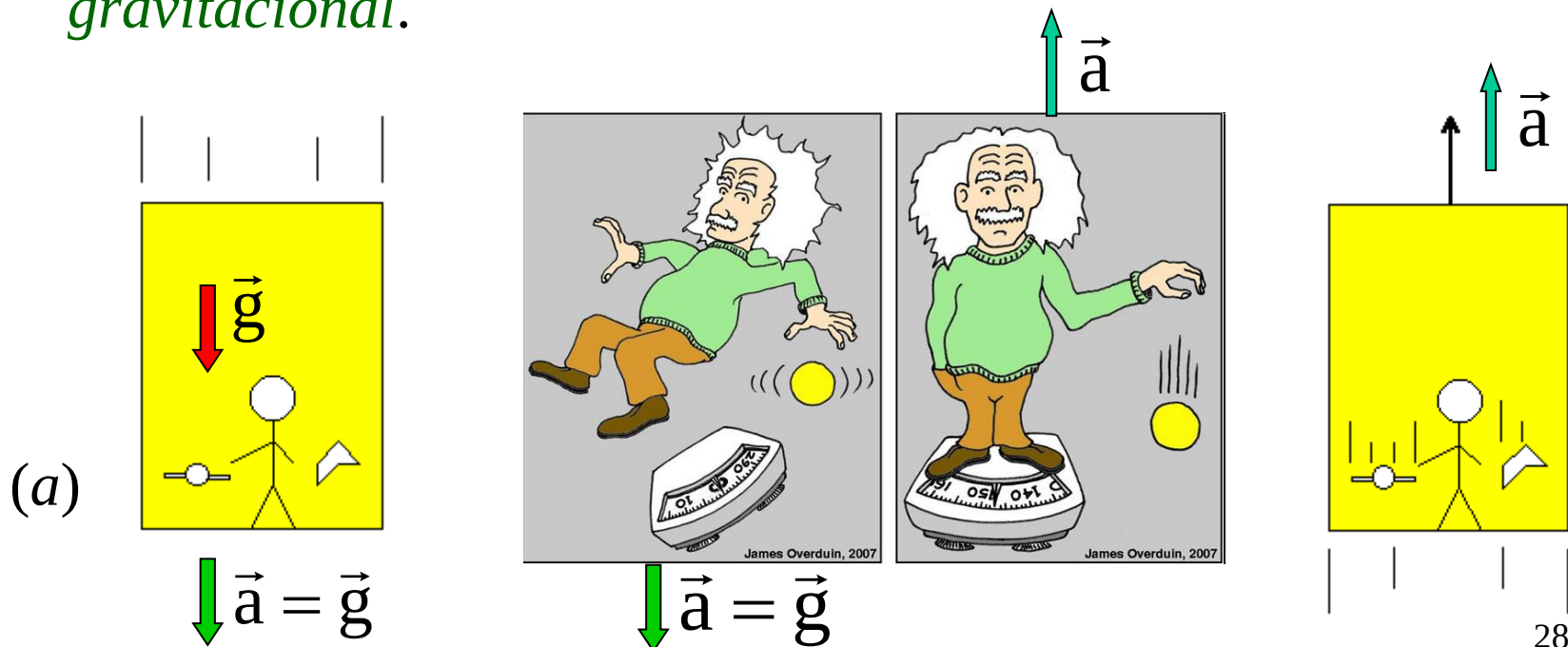
O elevador de Einstein



Relatividade Geral

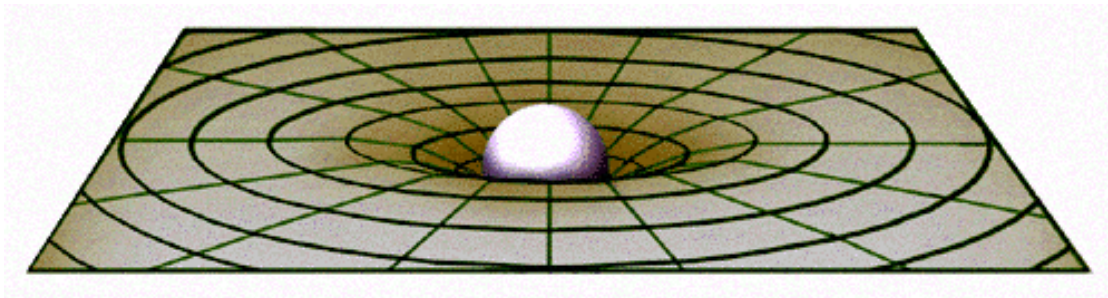
- Princípio da equivalência de Einstein

Num recinto suficientemente pequeno para que o campo gravitacional dentro dele possa ser considerado uniforme e em queda livre dentro deste campo, todas as leis da física são as mesmas que num referencial inercial, na ausência do campo gravitacional.

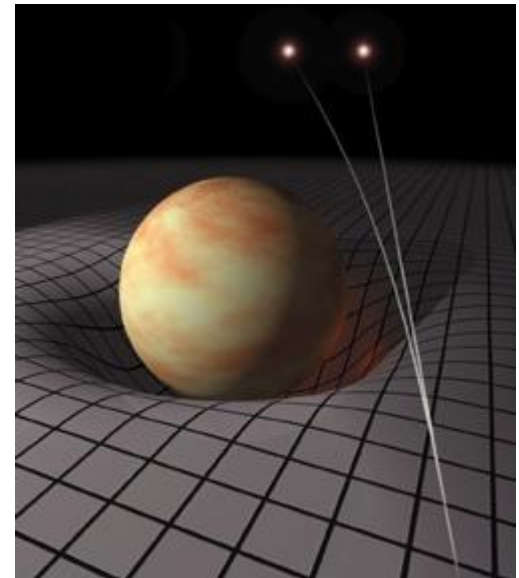


Relatividade Geral

- Só precisamos de **geometria** para descrever trajetórias dos corpos.
- Einstein encarou a **força gravitacional** como uma **força de inércia** $\longrightarrow$ **curvatura do espaço-tempo!**

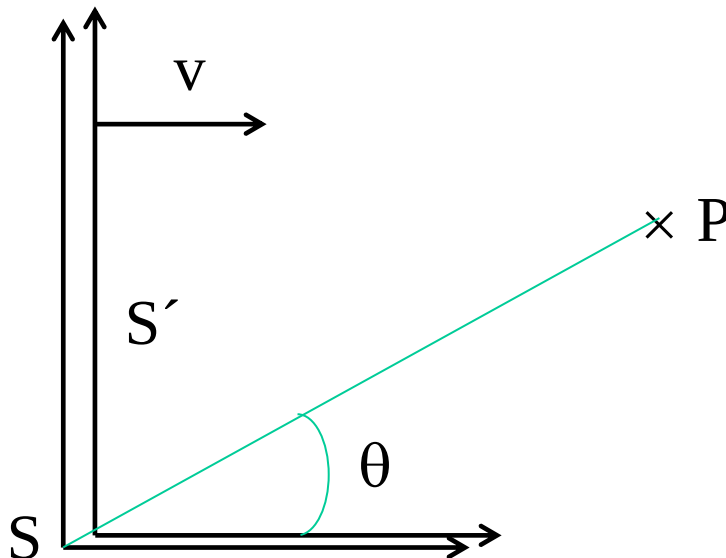


“A massa diz ao espaço-tempo como se curvar; e o espaço-tempo diz à massa como se mover”!



Expressão geral para o efeito Doppler:

$$f' = \gamma f (1 - \beta \cos \theta)$$

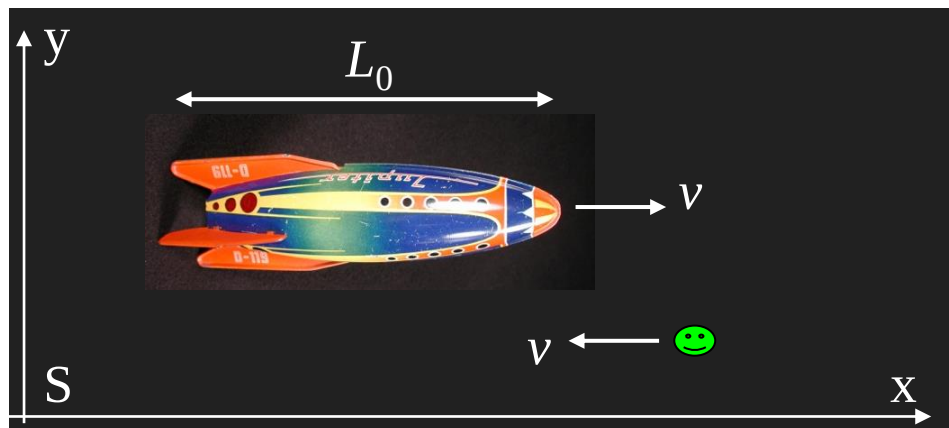


Note: os casos mencionados são casos particulares do caso geral, com $\theta = 0^\circ$ ou 180° . Se a fonte se move, então $f' = f_0$ e a frequência observada a 90° é $f = f_0/\gamma \sim (1-\beta^2/2) f_0$.

Prob. 31: Uma espaçonave cujo comprimento próprio é 350 m está se movendo com uma velocidade de $0,82c$ em um certo referencial. Um micrometeorito, também com velocidade de $0,82c$ neste referencial, cruza com a espaçonave viajando na direção oposta. Quanto tempo o micrometeorito leva para passar pela espaçonave, do ponto de vista de um observador a bordo da espaçonave?

$$L_0 = 350 \text{ m}$$

$$v = 0,82 c$$



Velocidade do meteorito
em relação à nave:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$



$$v' = \frac{-v - v}{1 - \frac{v(-v)}{c^2}} = \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = -\frac{1,64 c}{1 + (0,82)^2} \approx -0,98 c$$

$$v' \approx -2,94 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\Delta t_0 = \frac{L_0}{|v'|} \approx \frac{350 \text{ m}}{2,94 \times 10^8 \text{ m/s}} \approx 1,19 \mu\text{s}$$

Prob. 39: Uma espaçonave está se afastando da Terra a uma velocidade de $0,20c$. Uma fonte luminosa na popa da nave parece azul ($\lambda = 450 \text{ nm}$) para os passageiros. Determine: **(a)** o comprimento de onda e **(b)** a cor (azul, verde, amarela...) da luz emitida pela nave, do ponto de vista de um observador terrestre.

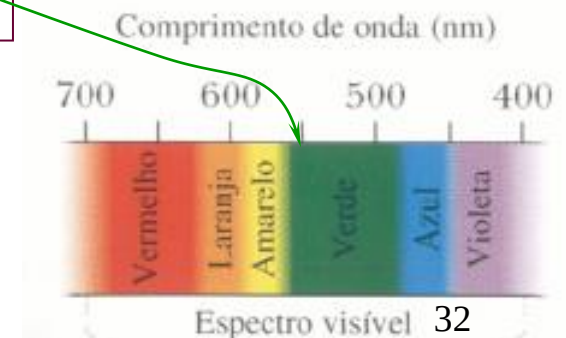
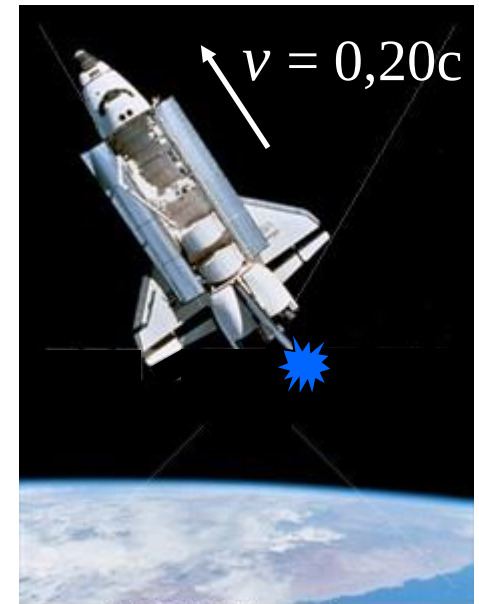
• Efeito Doppler da luz (se afastando):

$$f' = f \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda} \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^{1/2}$$

a)

$$\lambda' = \lambda \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{1/2} = 450 \text{ nm} \left(\frac{1,2}{0,8} \right)^{1/2} \approx 551 \text{ nm}$$

b) Luz "verde-amarelada":



Problema 76 – Um transmissor de **radar** T está em repouso em uma referencial S' que se move para a direita com velocidade v em relação ao referencial S (veja a figura). Um contador mecânico (que pode ser considerado um relógio) do referencial S' , com um período τ_o (no referencial S'), faz com que o transmissor T emita pulsos de radar, que se propagam com a velocidade da luz e são recebidos por R , um receptor do referencial S .

(a) Qual é o período τ do contador do ponto de vista do **observador** A , que está em repouso no referencial S ?

(b) Mostre que no receptor R o intervalo de tempo entre os pulsos recebidos **não é τ nem τ_o** , mas

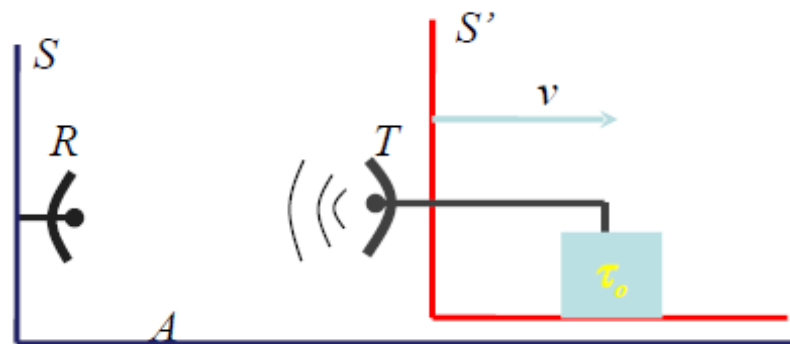
$$\tau_R = \tau_o \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

(a) Explique por que o receptor R e o observador A , que estão em repouso no mesmo referencial, medem um período diferente para o transmissor T .

$$(a) \Delta t = \frac{\Delta t_o}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Delta t_o = \tau_o$$

$$(b) f' = f \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \text{Efeito Doppler: Quando a fonte está se afastando do observador.}$$

$$f = 1/\tau \quad \tau_R = \tau_o \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \tau_o \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$



(c) O **relógio** mede o efeito relativístico de dilatação do tempo, e o **radar**, o efeito Doppler.

Prob. 47: Qual deve ser o momento linear de uma partícula, de massa m , para que a energia total da partícula seja 3 vezes maior que a sua energia de repouso ?

$$E = m c^2 = 3 (m_0 c^2)$$

mas:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$



$$9 m_0^2 c^4 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$



$$8 m_0^2 c^2 = p^2$$



$$p = 2\sqrt{2} m_0 c$$

Prob. 51: Uma certa partícula de massa de repouso m_0 tem um momento linear cujo módulo vale $m_0 c$. Determine o valor: **(a)** de β ; **(b)** de γ ; **(c)** da razão sua energia cinética e energia de repouso.

$$\boxed{p = m(v) v = m_0 c} \rightarrow \frac{m_0 v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = m_0 c \rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\text{a)} \quad 2 \frac{v^2}{c^2} = 1 \rightarrow \beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$$

$$\text{b)} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{(1 - 1/2)}} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1,414$$

$$\text{c)} \quad \frac{K}{E_0} = \frac{(\gamma - 1) m_0 c^2}{m_0 c^2} \approx 1,414 - 1 = 0,414$$