Neste problema você vai estimar o comprimento de um par de Cooper usando o princípio da incerteza de Heisenberg, $\delta p\, \delta x \approx \hbar$, em que δp é a incerteza no momento e δx é a incerteza na posição. Considere que a incerteza característica da energia de dois elétrons próximos ao nível de Fermi que formam um par de Cooper é o gap Δ, e a incerteza na posição deles é exatamente o comprimento típico do par de Cooper, l.

(a) Expresse l em função da velocidade de Fermi v_F e do gap Δ.

A incerteza no momento é dada por:

$$\begin{aligned}
\delta E &= \Delta \\
\delta\left(\frac{p^2}{2m}\right)_{E_F} &= \Delta \\
\frac{p_F}{m}\delta p &= \Delta \\
\delta p &= \frac{\Delta}{v_F}
\end{aligned}$$

Portanto, usando o princípio da incerteza de Heisenberg:

$$\begin{aligned}
\delta p \delta x &\approx \hbar \\
l &\approx \frac{\hbar v_F}{\Delta} \qquad (1)
\end{aligned}$$

(b) Estime os valores típicos de v_F e Δ para um supercondutor convencional e calcule o valor típico de l. Compare l com o típico espaçamento entre os átomos de um cristal, e interprete o seu resultado. Lembre-se de que a energia de Fermi é da ordem de 10 eV, e a temperatura de transição supercondutora (que é proporcional ao gap) é da ordem de 1 K. Você pode approximar $10^{-3}\,\mathrm{eV} \approx 10\,\mathrm{K}$ para converter energia em temperatura usando a constante de Boltzmann.

Usando a definição da energia the Fermi:

$$\begin{aligned}
E_F &= \frac{m v_F^2}{2} \\
v_F &= \sqrt{\frac{2E_F}{m}}
\end{aligned}$$

Substituindo $E_F = 10\,\mathrm{eV} \approx 1.6 \times 10^{-18}\,\mathrm{J}$ e $m \approx 9 \times 10^{-31}$ kg, obtemos:

$$v_F \approx 2 \times 10^6\,\mathrm{m/s}$$

Usando agora que:

$$\Delta \approx k_B T_c \approx 10^{-4}\,\mathrm{eV}$$

$$\hbar \approx 6.6 \times 10^{-16}\,\mathrm{eV.s}$$

e substituindo na Eq. (1), obtemos:

$$l \approx 10^5\,\text{Å} \tag{2}$$

A típica distância entre os átomos num cristal é da ordem de 1-5 Å. Portanto, os pares de Cooper estão "entrelaçados".

(c) Considere dois supercondutores cujas energias de Fermi (no estado normal) são iguais. Um dos supercondutores é convencional e apresenta uma temperatura de transição de 1 K. O outro supercondutor é não-convencional e tem uma temperatura de transição de 100 K. Qual é a razão entre os comprimentos dos pares de Cooper nos dois supercondutores? Usando o resultado do item (b), estime o comprimento típico do par de Cooper do supercondutor não-convencional.

Usando a Eq. (1), obtemos:

$$\frac{l_{\mathrm{nc}}}{l_{\mathrm{c}}} = \frac{\Delta_{\mathrm{c}}}{\Delta_{\mathrm{nc}}} = 10^{-2} \tag{3}$$

em que c refere-se ao convencional e nc, ao não-convencional. Usando a Eq. (2), obtemos $l_{\mathrm{nc}} \approx 10^3$ Å.